

Préface.

Ce cours d'électricité a été rédigé à l'intention des étudiants qui préparent, dans le cadre de la réforme L.M.D¹, une licence dans les domaines des " Sciences de la Matière" et des "Sciences et Technologies". Il est conforme au programme officiel.

Le programme d'électricité du S2 se compose de deux grandes parties :

La première comporte les éléments de base de la théorie électromagnétique : l'*électrostatique* que nous présentons aux Chapitres I & II et l'*électromagnétisme* qui fait l'objet des Chapitres IV & V.

Les concepts de masse, de charge, de force, de champ, d'énergie et de potentiel, que nous introduisons dans cette partie, ont été très longs à se dessiner, au cours de l'histoire, et à être acceptés par les savants. D'autre part, il a fallu plus d'un siècle, de l'expérience de Coulomb en 1785, qui marque la naissance de cette théorie, à la parution de la théorie de la relativité restreinte en 1905, pour comprendre les lois de l'électromagnétisme. C'est la raison pour laquelle nous insistons particulièrement sur l'aspect conceptuel afin que l'étudiant puisse, dès la première année, réfléchir sur la signification des grandeurs physiques qu'il rencontre à mesure qu'il avance dans ses études.

L'étudiant, qui a déjà pris connaissance de ces lois au lycée, doit les assimiler durant les trois années de la licence de physique, à l'aide d'un outil mathématique plus performant d'une année à l'autre. En première année, il sait dériver et calculer les primitives des fonctions élémentaires, il a appris le calcul vectoriel mais ignore l'analyse vectorielle. C'est avec cet outil qu'il doit apprendre les premiers éléments de l'électromagnétisme. Les équations de Maxwell, qui expriment les lois de l'électromagnétisme, apparaissent dans ce cours sous forme intégrale et en régime quasi stationnaire. Ces équations sont appliquées à des cas où elles se ramènent à des intégrales simples que l'étudiant peut résoudre. Nous avons jugé utile d'introduire, dès la première année, les quatre grandeurs vectorielles qui apparaissent dans les équations de Maxwell : les champs \vec{E} et \vec{B} et les excitations \vec{D} et \vec{H} , la distinction entre ces grandeurs apparaîtra, en deuxième année, lors de l'étude des milieux².

La physique étant une science expérimentale, les lois de l'électromagnétisme sont mises en évidence, dans ce cours, à partir de la description d'expériences dont certaines sont faciles à réaliser.

¹ L.M.D. Système d'enseignement supérieur instauré en Algérie en 2004. Le système L.M.D. comporte trois grades : La *Licence* (L.), préparée en trois ans (L1, L2, L3), le *Master* (M.) en deux ans (M1, M2) et le *Doctorat* (D.) en trois ans. Chaque année se compose de deux semestres, en Licence par exemple il y a six semestres (S1, S2, S3, S4, S5, S6). Le module d'*électricité* est enseigné en S2.

² Cette étude n'est pas au programme du cours de S2.

Cette partie donne lieu à de nombreuses applications : A partir du travail des forces qui agissent sur un système, on calcule l'énergie qu'il emmagasine, et inversement, à partir de l'énergie stockée dans un système, on peut calculer les forces et les couples qui y interviennent : c'est le cas des électromètres, des électrodynamomètres, des éléments moteurs des appareils de mesure etc.

L'étudiant, qui opte pour une licence de physique, approfondira ses connaissances dans le module "*d'électromagnétisme*" en deuxième année et, en troisième année, dans deux modules : "*Ondes Electromagnétiques & Optique*" et "*Relativité*".

La deuxième partie, qui est exposée aux chapitres III & VI, porte sur l'électrocinétique des courants continus et des courants alternatifs qui constitue une application de la théorie électromagnétique. Cette partie est essentielle pour l'étudiant en technologie qui se destine à une carrière en électricité industrielle. En licence de physique elle constitue un pré-requis pour les modules d'*électronique* et d'*électrotechnique*.

Chaque chapitre est illustré par des exercices qui constituent une application, à des problèmes concrets, des lois introduites dans le cours. La résolution de ces exercices permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien assimilé le cours, d'estimer les ordres de grandeur et d'attacher de l'importance à l'analyse dimensionnelle aux unités de mesures et à la précision d'un résultat numérique. Les solutions des exercices, placés à la fin de chaque chapitre, seront publiées dans un autre fascicule.

Nous tenons à remercier les collègues qui ont bien voulu relire le manuscrit et nous aider à l'améliorer, notamment les professeurs Ahmed-Chafik Chami, Hakim Djelouah et Zohra Méliani. Il est possible que cette première édition comporte quelques imperfections, nous serions reconnaissants à tous ceux qui nous feraient part de leurs remarques et suggestions.

Alger octobre 2012.

Les auteurs

AÏT-GOUGAM Leïla
BENDAOUH Mohamed
DOULACHE Naïma
MÉKIDÈCHE Fawzia

PROGRAMME.

Domaine SM, : Licence de Physique: **Première année L1, deuxième semestre S 2**

UEF : **Module** : Phys 2 : Electricité

Semestre	Code	Intitulé	Cours/sem	TD/sem	TOTAL
S2	Phys2	Electricité	2x1h30	1x1h30	= 4h30

Interaction électrique : Electrification, Conservation de la charge, Conducteurs et isolants, Loi de Coulomb.

Electrostatique: Champ et potentiel créés par une charge, principe de superposition, distribution de charges, Topographie d'un champ.

Dipôle électrique : Potentiel et champ créés par un dipôle. Couple exercé sur un dipôle par un champ. Energie d'un dipôle.

Notion de flux. Théorème de Gauss (sans démonstration) : applications.

Conducteurs en équilibre. Influence totale.

Condensateurs : capacité, énergie électrique, groupements de condensateurs

Courants continus: Rupture d'un équilibre électrostatique. Intensité électrique, Loi d'Ohm groupements de résistances. Loi de Joule.

Circuits à courants continus : Générateur, récepteur. Lois de Kirchhoff.

Charge et décharge d'un condensateur.

Magnétisme : Champ créé par un aimant. Force de Lorentz, force de Laplace.

Moment magnétique d'une spire, couple agissant sur une spire placée dans un champ magnétique.

Loi de Biot : Applications

Force entre Deux courants parallèles : définition de l'Ampère.

Induction magnétique : Flux magnétique. Loi de Faraday. Générateurs de courants alternatifs.

F.E.M. d'auto induction Etablissement et rupture du courant dans un circuit R, L.

Courants alternatifs : Représentation d'une grandeur sinusoïdale : Représentation de Fresnel, notation complexe. Impédance. Applications : Circuits R,L,C série. Circuits R,L,C parallèle. Circuit bouchon.

Puissance en C.A. notation complexe.

Notions sur les courants triphasés : Obtention. Représentation de Fresnel. Montages étoile et triangle. Puissance en triphasé.

Ouvrages conseillés : 1°) Cours polycopié OPU *Electricité* : Caubarère, , Fourny, Ladjouze 2°)

Alonso & Fynn Physique Tome 2

Principales notations

A, B, C, D etc : Points de l'espace

M Point où est calculé le champ \vec{E} ou \vec{B}

P Point où se trouvent les sources ρ ou \vec{J}

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ Vecteurs unitaires, en coordonnées cartésiennes.

x, y, z Coordonnées cartésiennes d'un point

X, Y, Z Composantes d'un vecteur, en coordonnées cartésiennes.

\vec{a} Accélération

\vec{B} champ magnétique

C capacité

\vec{D} Excitation électrique

\vec{E} champ électrique

\vec{E}_m champ électromoteur

E Energie

e force électromotrice (f.e.m)

e charge de l'électron

f fréquence

\vec{F} Force

\vec{g} Champ de la pesanteur

\vec{H} Excitation magnétique

I Intensité du courant électrique

\vec{J} Vecteur densité de courant

J Moment d'inertie

$j = \sqrt{-1}$

K ou k Coefficient

L Coefficient de self induction

M Coefficient d'induction mutuelle

\vec{M} Moment magnétique

$\vec{M}_{\vec{F}/O}$ Moment d'une force / au point O.

$M_{\vec{F}/\Delta}$ Moment d'une force / à l'axe Δ .

m Masse

\vec{n} vecteur unitaire

P Puissance

\vec{p} Moment électrique

Q ou q Charge électrique

R Résistance électrique

\vec{R} ou \vec{r} Vecteur position

T Période

T° Température

t Temps

\vec{u} vecteur unitaire

V, U potentiel électrique

V Volume

\vec{V} ou \vec{v} Vitesse

W travail

X Réactance

Y Admittance

Z Impédance

α, β Angles

$\vec{\Gamma}$ Couple

ϵ Permittivité électrique

η Coefficient de viscosité, Rendement

θ Angle

λ Longueur d'onde

μ Perméabilité magnétique

π Nombre "Pi"

ρ Densité de charges volumiques

ρ_M Masse volumique

ρ_Ω Résistivité électrique.

σ Densité de charges superficielles

σ Conductivité électrique

τ Constante de temps

ϕ Phase ou déphasage

Φ Flux magnétique

ω Pulsation ou Vitesse angulaire

Ω Unité de résistance : Ohm.

TABLE DES MATIERES

Préface	1
Programme	3
Notations	4

Chapitre I
ELECTROSTATIQUE

1. INTRODUCTION	
1.1. Electrification par frottement (triboelectricité).....	9
1.2. Les deux types d'électricité	10
1.3. Autres modes d'électrification	10
1.4. L'électroscope à feuilles d'or	11
1.5. La charge électrique.....	11
1.6. Quantification de la charge électrique.....	12
1.7. Principe de la conservation de la charge électrique.....	13
1.8. L'électrification et la constitution de la matière.....	13
1.9. Aperçu historique	14
2. LA FORCE ELECTRIQUE	
2.1. Loi de Coulomb.....	15
2.2. Validité de la loi de Coulomb	17
3. LE CHAMP ELECTRIQUE	
3.1. Champ électrique.....	18
3.2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle isolée.....	19
3.3. Champ créé par plusieurs charges ponctuelles: Principe de superposition.....	19
3.4. Champ créé par une distribution continue de charges	20
3.5. Champ uniforme.....	20
4. LE POTENTIEL ELECTRIQUE	
4.1. Circulation d'un vecteur	21
4.2. Potentiel électrique	22
4.3. Cas de plusieurs charges, d'une distribution de charges	23
5. TOPOGRAPHIE DU CHAMP ELECTRIQUE	
5.1. Ligne de champ.....	25
5.2. Tube de champ	26
5.3. Surface équipotentielle.....	27
6. TRAVAIL & ENERGIE	
6.1. Travail de la force électrique	28
6.2. Energie potentielle	29
6.3. Energie interne d'une distribution de charges électriques	29
7. LE DIPOLE ELECTRIQUE	
7.1. Moment dipolaire électrique.....	30
7.2. Potentiel électrique crée par un dipôle	30
7.3. Calcul du champ électrique créé par un dipôle.....	31
7.4. Dipôle placé dans un champ électrique uniforme	32
7.4.1. Couple.....	32
7.4.2. Energie potentielle.....	32
8. LES DIELECTRIQUES	

9. THEOREME DE GAUSS

9.1. Flux d'un vecteur à travers une surface.....	35
9.2. Vecteur excitation ou déplacement électrique.....	35
9.3. Théorème de Gauss	36
9.4. Applications du théorème de Gauss.....	36

Annexe 1 : Les concepts de masse et de charge électrique	39
----------------------------------------------------------------	----

Exercices chapitre I	41
----------------------------	----

Chapitre II**CONDUCTEURS EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE****1. EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE**

1.1. Champ électrique.....	43
1.2. Potentiel électrique	43
1.3. Répartition des charges	44
1.4. Champ au voisinage d'un conducteur : Théorème de Coulomb	45
1.5. Pression électrostatique	46
1.6. Pouvoir des pointes.....	46
1.7. Conducteur creux	48
1.8. Capacité d'un conducteur.....	49

2. PHENOMENES D'INFLUENCE

2.1. Eléments correspondants	51
2.2. Influence partielle	51
2.3. Influence totale	52

3. CONDENSATEURS

3.1. Les condensateurs	53
3.2. Capacité d'un condensateur	54
3.3. Association de condensateurs	56

4. ENERGIE ET FORCE

4.1. Energie électrostatique d'un conducteur.....	58
4.2. Energie électrostatique d'un ensemble de conducteurs en équilibre.....	58
4.3. Calcul de la force à partir de l'énergie	58
4.4. Energie emmagasinée dans un condensateur	60
4.5. Localisation de l'énergie : Densité d'énergie électrostatique	61
4.6. Force s'exerçant sur l'armature d'un condensateur	61

Exercices chapitre II	64
-----------------------------	----

Chapitre III**LES COURANTS CONTINUS****1. COURANTS ELECTRIQUES**

1.1. Origine du courant électrique	67
1.2. Courant permanent	68
1.3. Sens conventionnel du courant	68
1.4. Intensité du courant	68
1.5. Ligne de courant.....	69
1.6. Vecteur densité de courant.....	69
1.7. Mouvement des électrons dans le vide.....	70
1.8. Mouvement des électrons dans un conducteur.....	70

2. LOI D'OHM

2.1. Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique	72
2.2. Forme locale de la loi d'Ohm.....	72
2.3. Groupement de résistances	75

3. L'EFFET JOULE**4. GENERATEURS**

4.1. Définitions	77
------------------------	----

4.2. Générateurs à vide : Force électromotrice (f.é.m)	77
4.3. Générateur en charge	78
4.4. Association de générateurs	81
5. RECEPTEURS	
5.1. Force contre électromotrice d'un récepteur : " f.c.é.m " d'un récepteur	82
5.2. Schéma équivalent d'un récepteur	82
5.3. Différence de potentiel aux bornes d'un récepteur	82
5.4. Rendement d'un récepteur	82
6. ANALYSE d'UN RESEAU ELECTRIQUE	
6.1. Définitions	83
6.2. Lois de Kirchhoff	83
7. CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR	
7.1. Etude de la charge du condensateur	85
7.2. Etude de la décharge du condensateur	89
Exercices chapitre III	90

Chapitre IV

MAGNETOSTATIQUE

1. INTRODUCTION	
1.1. Propriétés des aimants	93
1.2. Champ magnétique	94
1.3. Force de Coulomb	95
1.4. L'expérience d'Oersted et ses conséquences	95
2. ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR LE MOUVEMENT D'UNE CHARGE ELECTRIQUE	
2.1. Force de Lorentz	95
2.2. Application : Mouvement d'une particule dans un champ magnétique	96
3. ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR UN COURANT ELECTRIQUE	
3.1. Force de Laplace	98
3.2. Action d'un champ sur un circuit fermé : Moment magnétique	99
3.3. Energie d'un circuit placé dans un champ magnétique	100
4. CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UN COURANT	
4.1. Loi de Biot et Savart	102
4.2. Interaction entre deux courants rectilignes et parallèles: Définition de l'Ampère	104
4.3. Champ créé par une spire circulaire en un point de son axe	105
4.4. Dipôle magnétique	105
4.5. Notions élémentaires sur l'aimantation de la matière	106
5. THEOREME D'AMPERE	
5.1. Vecteur excitation magnétique	107
5.2. Circulation de l'excitation magnétique le long d'un contour fermé	107
5.3. Application : Champ créé par un solénoïde de longueur infinie	108
6. FLUX MAGNETIQUE	
6.1. Flux du champ magnétique à travers une surface	109
6.2. Equation de conservation du flux magnétique	110
6.3. Expression du travail des forces en fonction du flux coupé	111
6.4. Expression du travail en fonction de la variation du flux à travers un circuit	112
6.5. Induction mutuelle de deux circuits	112
6.6. L'inductance d'un circuit électrique	112
6.7. Calcul des forces appliquées à un circuit électrique	113
Annexe 2: Le champ magnétique terrestre	115
Exercices chapitre IV	116

Chapitre V L'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

1. LES PHENOMENES D'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE	
1.1. Mise en évidence des phénomènes d'induction	119
1.2. Lois de l'induction.....	121
2. LOI DE LENZ FARADAY	
2.1. Cas d'un circuit fermé placé dans un champ constant et uniforme.....	122
2.2. Champ électromoteur	123
2.3. Loi de Lenz-Faraday en fonction de la vitesse	124
2.4. Equation de Maxwell-Faraday.....	125
3. MUTUELLE INDUCTION ET SELF INDUCTION	
4. APPLICATION DES PHENOMENES D'INDUCTION	
4.1. Générateur de courant alternatif	127
4.2. Courants de Foucault	128
5. CIRCUIT " RL "	
5.1. Etablissement du courant.....	129
5.2. Rupture du courant	130
5.3. Bilan énergétique.....	132
5.4 Localisation de l'énergie : Densité d'énergie magnétique.....	132
Exercices chapitre V	133

Chapitre VI LES COURANTS ALTERNATIFS

1. LES COURANTS ALTERNATIFS	
1.1. Définitions	135
1.2. Les courants sinusoïdaux.....	135
1.3. Production des courants sinusoïdaux.....	136
2. LOIS D'OHM EN COURANT ALTERNATIF SINUSOIDAL	
2.1. La notation complexe	138
2.2. La représentation de Fresnel.....	140
3. ASSOCIATION DES IMPEDANCES	
3.1. Impédances montées en série	145
3.2. Impédances montées en parallèle	146
3.3. Etude du circuit RLC série : Résonance	146
3.4. Bobine (R,L) et condensateur C en parallèle : Antirésonance.....	148
4. PUISSANCE ELECTRIQUE EN COURANT SINUSOIDAL	
4.1. Valeur instantanée de la puissance électrique	149
4.2. Valeur moyenne de la puissance électrique	149
4.3. Puissance active	150
4.4. Puissance réactive	150
4.5. Puissance apparente.....	152
5. PUISSANCE EN NOTATION COMPLEXE	152
6. FACTEUR DE PUISSANCE	153
Annexe 3: Les courants triphasés	155
Exercices chapitre VI	161
Annexe 4: Dimensions & unités des grandeurs physiques	166
BIBLIOGRAPHIE	167

Chapitre I

ELECTROSTATIQUE

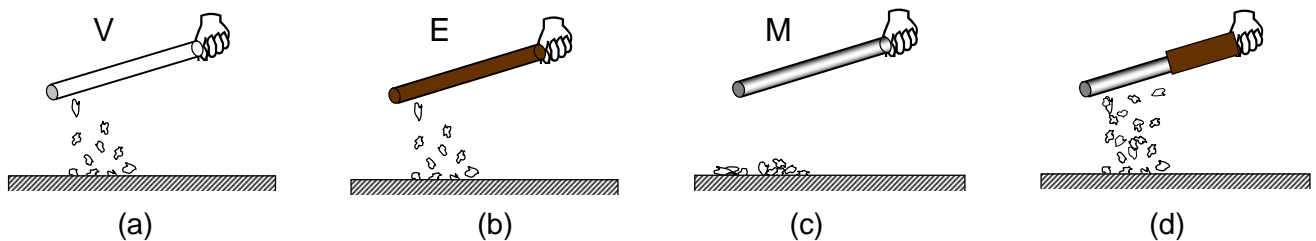
Nous avons étudié, en mécanique, l'interaction gravitationnelle qui intervient entre deux corps caractérisés par leurs masses. Nous allons considérer, dans ce qui suit, une autre interaction, l'interaction électrique, qui fait intervenir le concept de charge électrique. L'électrostatique est la partie de l'électricité qui ne fait intervenir que des charges fixes¹.

1. INTRODUCTION.

1. 1. Electrification par frottement (triboélectricité).

- Une tige en verre bien sèche, frottée à l'aide d'un morceau de drap en soie ou en laine, tenue à la main, attire de petits morceaux de papier² (figure I.1.a). On dit que le verre a été *électrisé*, ce phénomène est appelé *électrification* et la discipline de la physique qui traite de tels phénomènes est l'*électricité*.

- On obtient le même résultat si on remplace la tige en verre par un bâton d'ébonite³ et si on répète la même opération (figure I.1.b).



Figures I. 1

- Si on essaie d'électrifier, comme précédemment, une tige métallique, en cuivre par exemple, on n'obtient aucun résultat (figure I.1.c). La tige en métal, tenue à la main, n'exerce aucune force sur les morceaux de papier.

- Par contre si on tient, par l'intermédiaire d'un manche en bois, la tige métallique électrisée, on constate que des forces d'attraction se produisent sur toute la surface du métal (figure I.1.d).

Interprétation de ces expériences : On attribue cette propriété, qu'acquiert la matière et qui lui permet d'exercer une force, à l'existence de *charges électriques* q . Dans le cas du verre et de l'ébonite, ces expériences montrent que les charges restent localisées sur la partie frottée et ne se répandent pas sur toute la surface du matériau. Le verre et l'ébonite sont des *isolants électriques*.

¹ Les charges sont fixes dans le référentiel lié à l'observateur.

² Les morceaux de papier peuvent être remplacés par de la cendre ou une substance très légère.

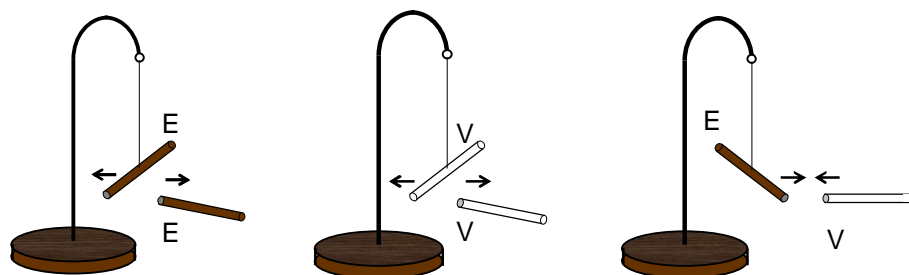
³ Ebonite : caoutchouc durci par mélange avec du soufre.

Par contre les charges dues à l'électrisation se déplacent dans les métaux et s'écoulent vers la terre à travers le corps de l'expérimentateur. C'est la raison pour laquelle on ne constate aucun effet de l'électrisation dans l'expérience de la figure I.1.c. Les métaux sont des corps *conducteurs* d'électricité.

Dans la quatrième expérience, le manche en bois, qui est un isolant, empêche l'écoulement des charges électriques. Néanmoins celles-ci se répandent sur toute la surface du métal.

1. 2. Les deux types d'électricité.

Les pendules, représentés sur les figures I.2, sont constitués d'une potence, fixée sur un socle en bois, à laquelle est relié un fil de soie sans torsion. Suspendons, en son milieu, un bâton d'ébonite dont une extrémité a été électrisée par frottement. Approchons de cette extrémité la partie électrisée, par la même méthode, d'un second bâton d'ébonite. L'interaction de ces parties électrisées se traduit par une répulsion.



Figures I.2 Répulsion et attraction entre corps électrisés

Répetons la même expérience, en remplaçant les bâtons d'ébonite par des tiges de verre électrisées comme précédemment. Là encore l'interaction se traduit par une répulsion.

Dans une troisième expérience, on met en présence l'extrémité électrisée du bâton d'ébonite et celle de la tige de verre électrisée. Il en résulte, à présent, une attraction.

Ces expériences mettent en évidence deux types d'électricité :

La première apparaît dans le verre : c'est *l'électricité vitreuse* à laquelle on a attribué arbitrairement un *signe positif*.

La seconde se manifeste dans l'ébonite et d'autres résines : c'est *l'électricité résineuse* ; on lui a attribué un *signe négatif*.

En outre, ces expériences montrent que : deux corps chargés d'une électricité de même signe, positive ou négative, se repoussent ; par contre ils s'attirent s'ils portent des charges de signes contraires.

Un corps qui n'est pas chargé est *neutre*.

1. 3. Autres modes d'électrisation.

Electrisation par contact : On constitue, à présent, un pendule électrostatique en suspendant au fil de soie une boule de polystyrène recouverte d'une matière conductrice. Celle-ci est initialement neutre. Approchons une tige en verre, électrisée par frottement, de la boule jusqu'au contact.

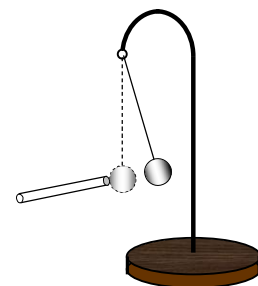


Figure I. 3

On constate que la boule est repoussée sous l'effet de son interaction avec la partie électrisée de la tige (figure I.3).

Cette expérience montre que lorsqu'un corps A, initialement neutre, est mis en contact avec un objet B portant une charge q , cette charge se répartit entre A et B. Les deux charges q_A et q_B , obtenues après électrisation par contact, sont de même signe : il en résulte une répulsion.

Electrisation par influence : Approchons une tige en verre électrisée de la boule B initialement neutre, sans la toucher. Nous constatons que la boule est attirée par la tige, comme l'illustre la figure I.4. La boule a été électrisée par influence. Lorsqu'on éloigne la tige électrisée, le pendule reprend sa position initiale. Le phénomène d'influence sera étudié au chapitre II.

Il existe d'autres modes d'électrisation. Par exemple, on peut électriser un corps, initialement neutre, en le reliant à une borne d'un générateur électrique.

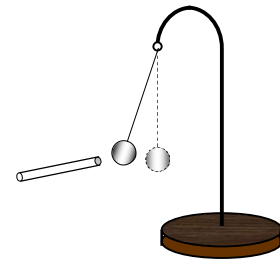


Figure I. 4

1.4. L'électroscope à feuilles d'or.

Le pendule électrostatique utilisé dans les expériences précédentes n'est pas un instrument très sensible. Souvent, pour détecter des états de faibles électrisations, on utilise un autre appareil : l'électroscope à feuilles d'or.

Il est constitué d'une tige métallique qui comporte à son extrémité inférieure deux feuilles d'or très minces qui tombent librement. Un plateau ou une boule métallique sont fixés à l'extrémité supérieure et l'ensemble est enfermé dans une cage métallique vitrée. On peut répéter les expériences sur l'électrisation par influence et par contact.

La figure I.5 met en évidence l'électrisation par influence. Le bâton d'ébonite, chargé négativement, est approché du plateau. Celui-ci se charge positivement par influence. Les charges négatives sont repoussées vers les feuilles d'or qui se repoussent.

Si on éloigne l'ébonite, le système (plateau, tige, feuilles) retrouve sa neutralité ; les feuilles de l'électroscope reprennent leur position verticale initiale.

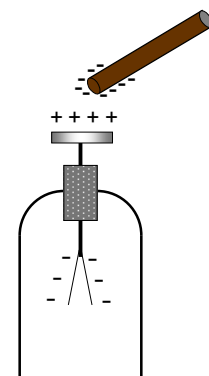


Figure I. 5

L'écartement des feuilles est d'autant plus grand que la charge de l'ébonite est grande.

Dans le cas d'une électrisation par contact, le bâton d'ébonite transmet, au système (plateau, tige, feuilles), une partie de ses charges. L'électroscope se charge négativement.

Pour le décharger, il suffit de relier le plateau à la terre par un conducteur.

1.5. La charge électrique.

Le concept de charge électrique : Les résultats des expériences précédentes ont amené les savants à introduire le concept de *charge électrique* confirmé par les

travaux de Coulomb⁴ et surtout par la découverte de l'électron en 1881 par Joseph J. Thomson. La charge électrique, qui caractérise le phénomène d'électrisation, ne peut être dissociée de la matière. Elle existe sous deux formes, qualifiées de *positive* et de *negative*.

Les expériences précédentes permettent d'énoncer la loi suivante:

Deux charges électriques de même signe positif ou négatif, se repoussent ; par contre elles s'attirent si elles sont de signes contraires.

Le concept de charge ponctuelle : Comme pour la masse, on introduit le concept de charge ponctuelle. C'est une charge dont les dimensions sont suffisamment petites par rapport aux distances d'observation pour être assimilée à un point géométrique.

La charge électrique est une grandeur mesurable: Une grandeur physique est mesurable lorsqu'on sait définir le rapport de deux grandeurs G_1 et G_2 de son espèce⁵.

$$\frac{G_1}{G_2} = k$$

où k est une constante.

Soit une charge Q_1 placée en un point P de l'espace ; en un point M , qui se trouve à une distance d de P , on place une autre charge q et on mesure l'intensité de la force F_1 qui s'exerce sur q de la part de Q_1 . On remplace Q_1 par une autre charge Q_2 et on mesure la force F_2 que subit la charge test q . Ces forces ont toutes la même direction. L'expérience montre que:

Une charge électrique est proportionnelle au module de la force qu'elle crée en agissant sur une même charge test placée en un même point.

On trouve

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = k$$

Quelle que soit la charge Q le rapport k reste constant. La charge électrique est donc une grandeur mesurable. Parmi toutes les charges Q , on en choisit arbitrairement une comme unité de mesure U , et on exprime toutes les autres charges en fonction de U sous la forme :

$$Q = k U$$

k est la mesure de Q avec l'unité choisie U . Dans le système d'unités M.K.S.A (mètre, kilogramme, seconde, ampère) l'unité de la charge électrique est le *coulomb* dont le symbole est C (voir Annexe 4).

1.6. Quantification de la charge électrique.

Le physicien américain Robert A. Millikan a montré en 1913, à partir d'une expérience mettant en jeu des gouttes d'huile électrisées, le fait que toute charge électrique q est quantifiée, c'est à dire qu'elle n'existe que sous forme de multiples d'une charge élémentaire indivisible e :

$$q = Ne$$

où :

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}$$

⁴ Voir § 2.

⁵ Deux grandeurs sont de la même espèce si on peut les comparer.

C'est la charge électrique portée par l'électron et le proton.

<i>Particule</i>	<i>Charge électrique</i>	<i>Masse</i>
Electron	$- 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Proton	$+ 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron	0	$1,674 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Tableau I.1. Constituants de l'atome

L'expérience de Millikan sera présentée sous forme d'exercice (Exercice I.10).

1. 7. Principe de la conservation de la charge électrique.

Lors des expériences précédentes, quand on frotte la tige de verre avec un morceau de drap, la tige de verre acquiert une charge positive, mais en même temps le morceau de drap prend une charge égale et opposée. Dans le système formé par la tige et le drap, la quantité de charge électrique reste constante. Les charges négatives arrachées au verre se retrouvent dans le morceau de drap.

Ce phénomène résulte d'un principe général, c'est le *Principe de conservation de la charge électrique* :

Dans un système isolé la somme algébrique des charges électriques reste constante.

En physique un principe ne se démontre pas ; il reste valable tant qu'il n'est pas démenti par l'expérience⁶. Le principe de la conservation de la charge a toujours été vérifié expérimentalement. Ainsi, lors d'un choc entre deux protons, lorsque les énergies mises en jeu sont importantes, il peut en résulter une création de nouvelles particules : une paire proton-antiproton⁷.

$$\begin{array}{rcl} p + p & \rightarrow & p + p + (p + \bar{p}) \\ (+e) + (+e) & = & (+e) + (+e) + (+e) + (-e) \end{array}$$

On remarque que la charge électrique totale est la même avant et après le choc.

1.8. L'électrisation et la constitution de la matière.

On sait que la matière est constituée d'atomes⁸. Dans le modèle planétaire, un atome est formé d'un noyau chargé positivement autour duquel gravitent Z électrons. La charge totale du noyau est $+Ze$ et celles de tous les électrons est $-Ze$. Z est le numéro atomique de l'atome. Par conséquent un échantillon de matière est électriquement neutre.

Les électrons internes sont fortement liés au noyau ; par contre les électrons périphériques le sont beaucoup moins. Ces derniers peuvent être facilement arrachés par frottement. Le fait de frotter deux corps, électriquement neutres, l'un contre l'autre, entraîne un transfert d'électrons de l'un vers l'autre. Les deux corps ne sont plus neutres, ils sont *électrisés*.

Celui qui a cédé des électrons se trouve chargé positivement et celui qui en a reçu se charge négativement.

⁶ Le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = m \vec{a}$ par exemple n'est plus valable pour des vitesses qui ne sont plus négligeables devant celle de la lumière ; il en est de même du principe de l'action et de la réaction.

⁷ Voir le cours de Relativité restreinte [2] de la 3^{ème} année de Licence (chapitre III : Dynamique) .

⁸ La structure de la matière est étudiée en S1 (Chim 1 : *Structure de la Matière*)

L'électrisation résulte d'un transfert ou d'un déplacement d'électrons⁹.

Les expériences précédentes ont mis en évidence deux types de matériaux :

Les *isolants électriques* ou *diélectriques* (verre, résines, matières plastiques, etc.) qui ne comportent que des charges liées ; celles-ci ne peuvent effectuer que des petits déplacements autour de leurs positions d'équilibre.

Les seconds, dans lesquels les électrons peuvent se déplacer facilement, sont des *conducteurs*. Les métaux sont de bons conducteurs, le corps humain l'est moins, mais comme l'a montré l'expérience de la figure I.1.c, il permet aux charges électriques de s'écouler vers la terre qui, elle aussi, est un conducteur.

1.9. Aperçu historique.

Ces phénomènes d'électrisation avaient déjà été observés dès l'antiquité. Les grecs, contemporains du mathématicien Thalès de Milet, avaient remarqué, six siècles avant Jésus Christ, que l'ambre jaune (électron) frotté attirait des substances très légères. Mais la contribution des grecs à l'électricité fut, comme l'a signalé P. Devaux¹⁰, purement linguistique. En 1672 l'allemand Otto Von Guericke invente la première machine électrostatique qui produit de l'électricité par frottement. Les phénomènes d'électrisation par influence ont été découverts par l'anglais Stephen Gray à qui nous devons aussi la distinction entre matériaux conducteurs et matériaux isolants. La mise en évidence, en 1733, de l'existence de deux *sortes d'électricité* fut l'œuvre du français Charles J. Du Fay: il qualifia de vitreuse celle qui est développée sur du verre, et l'autre de résineuse parce qu'elle apparaît sur de la résine. Par la suite, l'américain Benjamin Franklin attribua le signe positif à l'électricité vitreuse et le signe négatif à celle qui apparaît dans les résines.

Avant 1785, l'étude de l'électrostatique était purement qualitative. On disposait de la machine de Von Guericke pour produire l'électricité et de la bouteille de Leyde pour l'emmagasiner. Celle-ci fut inventée, à Leyde en 1745, par Van Musschenbroeck. En 1785, Coulomb énonce une loi qui va permettre d'aborder l'étude de l'électricité¹¹ avec l'outil mathématique et d'élaborer des théories.

⁹ Il y a transfert d'électrons dans le cas d'électrisations par frottement et par contact et déplacement d'électrons lors d'une électrisation par influence (Voir Ch II. § 2).

¹⁰ Devaux P. *Histoire de l'électricité* Ed. P.U.F 1954

¹¹ C'est cette étude que nous allons entamer, après avoir introduit la loi de Coulomb, dans ce chapitre consacré aux phénomènes d'électrostatique du vide.

Nous aborderons, dans la suite de ce chapitre, les concepts fondamentaux de force, d'énergie, de champ et de potentiel.

Les forces d'interaction : c'est la méthode de Newton que nous avons utilisée en mécanique en S1 et que nous appliquerons à l'électrostatique dans le cas de l'interaction coulombienne.

L'énergie : ce concept, introduit par Leibnitz, est à la base de la mécanique analytique de Lagrange et de Hamilton. Nous verrons, dans ce cours, de nombreux problèmes qui peuvent être résolus à partir de l'énergie emmagasinée dans un système.

Le champ : ce concept, introduit par Faraday et Maxwell et généralisé par Einstein, est à la base de l'électromagnétisme.

Le potentiel, utilisé par Poisson et Green en électricité, sera introduit dans ce chapitre au paragraphe 4.

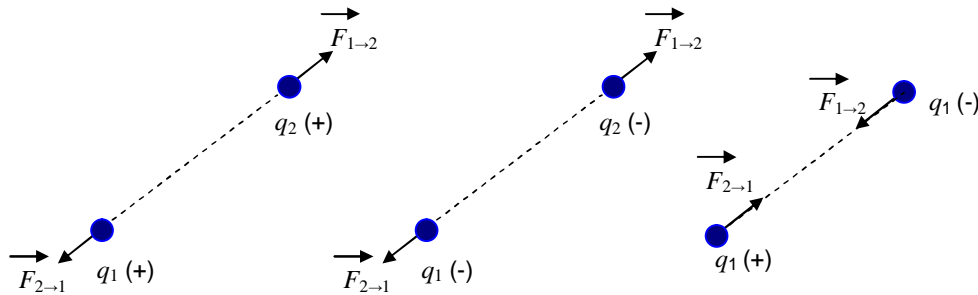
Un même problème peut être résolu, comme nous le verrons par la suite, par des méthodes différentes basées sur l'un ou l'autre de ces concepts. En voici un exemple en mécanique.

Exercice I. 1. Calculer la hauteur h atteinte par un corps de masse m lancé verticalement avec une vitesse V_0 , au voisinage du sol, en $x = 0$. Résoudre le problème en utilisant le concept de force (principe fondamental de la dynamique) puis le concept d'énergie (principe de la conservation de l'énergie). A.N : $V_0 = 6\text{m/s}$ [Solution I. 1].

2. LA FORCE ELECTROSTATIQUE.

2.1. Loi de Coulomb.

Coulomb a effectué, en 1785, une série de mesures, à l'aide d'une balance de torsion (§ 2.2), qui lui ont permis de déterminer les caractéristiques de la force d'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées par une distance r .



Figures I.6

Ces expériences ont mis en évidence une analogie avec la loi de la gravitation universelle de Newton, Coulomb a alors proposé l'expression mathématique :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} \quad (1)$$

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ désigne la force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 et $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ un vecteur unitaire porté par la droite qui joint les deux charges et orienté de q_1 vers q_2 (figures I.6). K une constante.

Lorsque le système MKSA rationalisé fut approuvé en 1946, on attribua à cette constante la valeur

$$K = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \quad \text{où} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi 10^9} \quad (2)$$

est la permittivité électrique du vide. Elle est mesurée, dans ce système, en farad par mètre : F/m (Ch. II, § 1.8 et Annexe 4)

La force électrostatique est *répulsive* si les charges sont de même signe, et *attractive* si elles sont de signes opposés (figures I.6), alors que la force de gravitation est purement attractive.

La loi de Coulomb est une loi empirique¹², elle est à la base de l'électrostatique.

Remarque : La loi de Coulomb obéit au modèle newtonien. Dans ce modèle, la force d'interaction, présente les caractéristiques suivantes :

- 1°) Elle s'exerce sur des objets de *même nature*, ici des charges électriques.
- 2°) Elle agit *suivant la droite qui joint* les deux objets.
- 3°) Elle est proportionnelle au produit des grandeurs liées aux objets considérés : q_1 et q_2 .
- 4°) Elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux objets.
- 5°) Elle obéit au principe de l'action et de la réaction. $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$
- 6°) Enfin, elle est instantanée.

¹² Une loi empirique est obtenue à partir d'observations et d'expériences, mais elle n'est pas démontrée théoriquement.

Exercice I. 2. Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, on suppose que celui-ci est constitué d'un électron, de masse m_e et portant une charge $-e$, qui tourne, sur une trajectoire circulaire de rayon r , autour d'un noyau assimilé à un objet ponctuel. Le noyau de l'atome d'hydrogène ne comporte qu'un proton.

Calculer le rapport des deux forces qui interviennent dans ce mouvement : La force électrostatique F_E et la force de gravitation F_G , on donne :

La charge électrique du proton est $+e$ et sa masse $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg,
 $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg, $r = 5,3 \times 10^{-11}$ m

Solution I. 2. Calculons les modules des deux forces d'interaction qui interviennent ici :

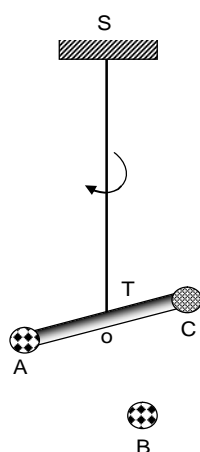
$$F_E = K \frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \times \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_G = G \frac{m_e m_p}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \times 1,67 \cdot 10^{-27}}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} = 3,6 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

Le rapport de ces deux forces : $\frac{F_E}{F_G} = 0,23 \cdot 10^{40}$ est très grand.

Par conséquent dans tous les problèmes d'électricité les interactions gravitationnelles seront négligées devant les forces d'origine électromagnétique. Par contre à grande échelle, en astronomie, seules les forces de gravitation interviennent. La matière comporte autant de charges positives que de charges négatives et, à cette échelle, la résultante des forces électrostatiques est nulle.

Exercice I. 3. Le pendule de torsion, qui est représenté sur la figure et qui constitue l'élément principal de la balance de Coulomb, comporte une tige T, isolante, horizontale, très



légère, munie, à une extrémité, d'une petite sphère métallique A et à l'autre extrémité d'un contrepoids isolant C. Sa longueur est $l = 20$ cm. Elle est suspendue en son milieu O à un support S fixe, par un fil métallique de longueur L et de constante de torsion $C = 12 \cdot 10^{-7}$ N.m/rad. La boule A, complètement déchargée, se trouve initialement en un point correspondant à un angle de torsion nul ($\alpha = 0$). Le système est en équilibre.

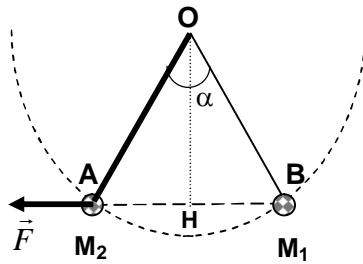
On met A en contact avec une boule B identique à A et portant une charge $+Q$. Il en résulte une électrisation de A qui tourne d'un angle $\alpha = 60^\circ$ par rapport à sa position initiale. Le système atteint, alors, une seconde position d'équilibre. Calculer la valeur de la charge Q .

N.B : Dans l'expérience de Coulomb, ce pendule est placé à l'intérieur d'une enceinte en verre. Les déviations sont repérées sur une bande graduée. La boule B est introduite, à l'aide d'une tige isolante, à travers un orifice percé dans le couvercle, comme le montre la figure I.7.

Solution I.3. Initialement la boule A est déchargée et la boule B porte une charge $+Q$. Après le contact, les deux boules étant identiques, chacune d'elles va prendre une charge :

$$q = Q/2$$

Appelons M_1 la position initiale de la boule A et M_2 sa nouvelle position lorsque le système atteint son équilibre après avoir tourné d'un angle α .



La figure ci-contre correspond à la 2^{ème} position d'équilibre du pendule. Le moment $M_{\vec{F}/\Delta}$ de la force \vec{F} , par rapport à l'axe de rotation Δ , est équilibré par le couple de torsion : $\Gamma = C\alpha$ du fil. La force de Coulomb a pour expression :

$$F = 9.10^9 \frac{q^2}{d^2} = 9.10^9 \frac{q^2}{l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

En effet $d = M_1 M_2 = 2 M_1 H = l \sin \frac{\alpha}{2}$

Calcul du moment $M_{\vec{F}/\Delta}$ $M_{\vec{F}/\Delta} = F OH = F \cdot \frac{l}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 9.10^9 \frac{q^2}{2 l \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}$

A l'équilibre $M_{\vec{F}/\Delta} = \Gamma$ d'où :

$$Q = 2q = 2 \sqrt{\frac{C \alpha}{9.10^9} \frac{2 l \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = 8,03 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

2.2. Validité et importance de la loi de Coulomb.

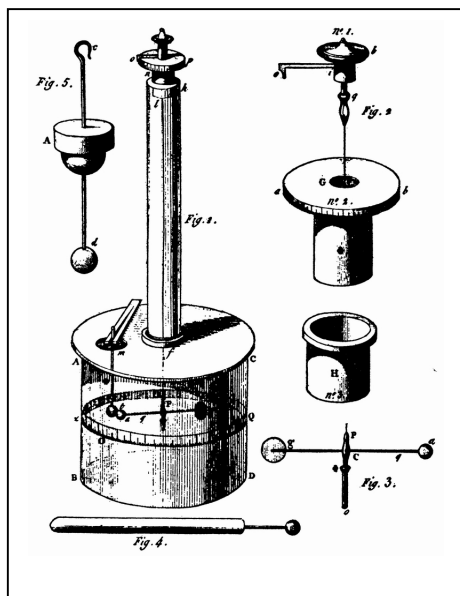


Figure I.7

La loi de Coulomb est valable en électrostatique. Elle reste valable dans le domaine des faibles vitesses, mais elle ne l'est plus pour les grandes vitesses. Son intervention dans les interactions intra nucléaires, est très faible. Le noyau contient des neutrons, dont la charge est nulle et des protons chargés positivement ; la répulsion coulombienne ne permet donc pas d'expliquer la cohésion du noyau. Une autre interaction intervient à cette échelle : c'est l'interaction forte.

La loi de Coulomb, obtenue à l'aide de la balance représentée ci-contre, est à la base de l'électrostatique, elle permet d'obtenir le champ et le potentiel électrostatiques. Mais ce n'est pas tout, en partant de cette loi et en appliquant la théorie de la relativité, on obtient l'expression de la force d'interaction entre deux charges en mouvement. Elle permet également de calculer les champs électrique et magnétique créés par une charge animée d'une vitesse constante. On peut en déduire, pour les faibles vitesses, la loi de Biot et la force de Lorentz que nous donnerons, au chapitre IV, sous forme de lois empiriques.

La planche de la figure I.7. est extraite des «Mémoires relatifs à la physique» de Charles André COULOMB 1785, réédités par A. Blanchard Paris 2002

3. LE CHAMP ELECTRIQUE¹³.

Au paragraphe précédent, nous avons utilisé le concept de force d'interaction.

Dans le cas de deux charges électriques par exemple, chacune des charges exerce sur l'autre une force dont l'expression mathématique est donnée par la loi de Coulomb. En vertu du principe de l'action et de la réaction de Newton, la seconde charge exerce sur la première une force égale et opposée. Ainsi les deux charges jouent le même rôle. En outre, cette interaction est, comme nous l'avons vu au §.2, *instantanée*.

Avec le concept de champ, le problème est posé d'une façon différente.

Une charge électrique Q , appelée "*charge source*", crée, dans l'espace environnant, appelé "*champ*", un "état" qui est mis en évidence par son action sur toute autre charge q placée en un point M de cet espace. Cet "état" existe *même en l'absence* de la charge q . Les charges Q et q ne jouent plus ici le même rôle : Q est la charge source du *champ* qu'elle crée et q la charge dont le comportement, dans ce champ, sera étudié.

3.1. Champ électrique.

En électrostatique:

On appelle champ électrique une région de l'espace où, en tout point, une charge q , maintenue immobile, est soumise à l'action d'une force électrique.

On introduit alors une grandeur vectorielle \vec{E} telle que

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad (3)$$

Cette grandeur \vec{E} est également appelée *champ électrique*.

De la même manière en mécanique, si au voisinage de la terre, où règne le champ de la pesanteur \vec{g} , on place une masse m , elle sera soumise à la force de gravitation qui, dans ce cas, n'est autre que son poids.

$$\vec{P} = m \vec{g} \quad (3')$$

On peut noter l'analogie entre le champ électrique \vec{E} et le champ de gravitation \vec{g} créé par la terre. Seulement \vec{g} est toujours dirigé vers le centre de la terre alors que le sens du champ électrique dépend du signe des charges qui le créent (figures I.8).

Dans le cas général:

On appelle champ une région de l'espace où, en tout point, une particule est soumise à l'action d'une force.

N.B. 1°) L'existence d'un champ ne se manifeste que lorsqu'on y introduit un corps

- de masse m dans le cas la gravitation
- de charge q dans le cas de l'électrostatique.

2°) Le *champ* désigne :

- la région de l'espace où une particule est soumise à l'action d'une force
- la grandeur vectorielle \vec{E} ou \vec{g} par exemple.

¹³ Selon Einstein : "La théorie du champ électrique de Faraday et de Maxwell représente probablement la transformation la plus profonde que les fondements de la physique aient subi depuis le temps de Newton." Conceptions scientifiques Ed. Flammarion 1990 page 44.

3.2 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle isolée.

Dans le cas d'une seule charge source Q , la force qui s'exerce sur la charge test q est donnée par la loi de Coulomb :

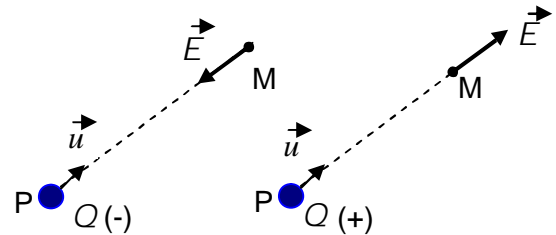
$$\vec{F} = K \frac{Qq}{r^2} \vec{u} \quad (4)$$

Avec (3) on obtient l'expression du champ électrostatique¹⁴ :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u} \quad (5)$$

C'est l'expression mathématique du champ électrostatique créé, au point M, par la charge source Q placée en P.

Les figures I.8 montrent que le champ est orienté vers la charge lorsqu'elle est négative et en sens inverse lorsqu'elle est positive.



Figures I. 8

3.3. Champ créé par un ensemble de charges ponctuelles : Principe de superposition.

On considère maintenant n particules de charges électriques Q_i , situées en des points P_i . On se propose de déterminer le champ électrostatique créé par cet ensemble de charges en un point M distant de r_i des points P_i .

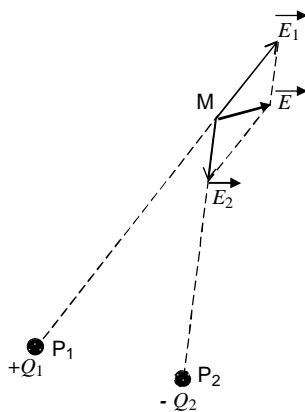


Figure I. 9

Ce champ est obtenu par la superposition des champs créés par chaque charge Q_i . Chacun de ces champs est calculé comme si la charge source était seule.

Ce *principe de superposition* résulte des propriétés d'additivité vectorielle des forces et des champs électrostatiques.

La figure I. 9 représente le champ créé par deux charges électriques en un point M de l'espace : c'est la somme vectorielle \vec{E} des deux champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 créés respectivement par $(+Q_1)$ et $(-Q_2)$.

Dans le cas de n charges sources Q_i , le champ électrique résultant est :

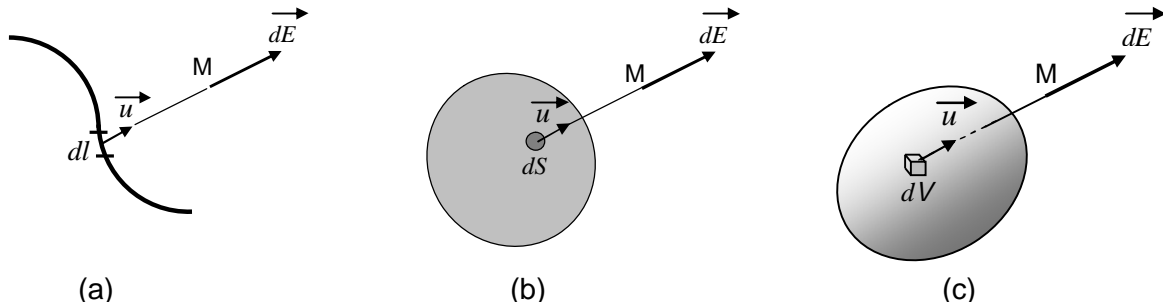
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad (6)$$

¹⁴ Le champ électrostatique est la valeur du champ électrique en régime indépendant du temps (électrostatique). Dans le cas général, le champ électrique a deux composantes : le champ électrostatique et le champ électromoteur (Voir Ch V § 2.2)

3.4 Champ créé par une distribution continue de charges.

Lorsque la charge Q est répartie sur un fil avec une densité linéique λ , chaque élément dl porte une charge $dQ = \lambda dl$, et crée un champ élémentaire:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}, \quad \text{le champ créé par } Q \text{ est : } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u} \quad (7)$$



Figures I. 10

Dans le cas d'une surface chargée avec une densité surfacique σ telle que $dQ = \sigma dS$, on trouve de la même façon :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_s \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u} \quad (8)$$

De même dans le cas d'un volume V chargé avec une densité volumique ρ telle que. $dQ = \rho dV$ on obtient :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u} \quad (9)$$

dl , dS et dV désignent respectivement les éléments de longueur, de surface et de volume.

3.5. Champ uniforme.

Un champ uniforme est une région de l'espace où le vecteur champ reste constant en tous les points de cette région.

Remarques : 1°) Ce concept peut être généralisé à tous les vecteurs en introduisant des "champs de vecteurs". Par exemple, un champ de vitesses, un champ d'accélération etc. Mais il n'existe que deux champs de force : le champ de gravitation et le champ électromagnétique dont le champ électrique est une composante¹⁵.

En électromagnétisme, la notion de champ a une importance fondamentale. Ce n'est pas le cas en mécanique newtonienne, où l'on considère plutôt les forces d'interaction. Par contre le concept de champ est à la base de la théorie de la relativité générale¹⁶ qui donne une explication de la gravitation.

2°) En physique classique, c'est-à-dire lorsqu'on ne tient pas compte des effets quantiques, une particule est caractérisée par sa masse¹⁷ m et sa charge électrique q . La masse est la source du champ de gravitation et la charge électrique crée le champ électromagnétique.

¹⁵ C'est ce que nous verrons dans le cours de *Relativité* [2] en L3.

¹⁶ Cette théorie a été élaborée pour comprendre des phénomènes que la théorie de Newton était incapable d'expliquer.

¹⁷ Voir l'annexe 1.

4. POTENTIEL ELECTRIQUE.

4.1. Circulation d'un vecteur.

En mécanique nous avons défini le travail élémentaire dW d'une force \vec{F} le long d'un trajet infiniment petit $\overline{MM'} = d\vec{l}$ par le produit scalaire:

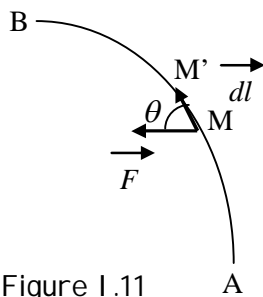


Figure I.11

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos \theta \quad (10)$$

Lorsque le trajet AB n'est plus un infiniment petit, le travail W de la force \vec{F} entre deux points A et B, est égal à la somme des travaux élémentaires dW .
A la limite, on passe à l'intégrale :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (11)$$

Dans le cas de la pesanteur, on sait¹⁸ que le travail de la force :

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

ne dépend pas du chemin suivi et ne dépend que des valeurs de l'énergie potentielle E_{pA} et E_{pB} mesurées en A et B.

$$W = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{l} = E_{pA} - E_{pB}$$

Par conséquent, le travail de cette force, le long d'un trajet fermé, est nul.

La notion de travail W , qui concerne les forces, peut être étendue à tous les vecteurs en introduisant la "circulation" \mathcal{C} d'un vecteur le long d'un trajet AB. La circulation élémentaire $d\mathcal{C}$ d'un vecteur :

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

au cours d'un déplacement infiniment petit $d\vec{l}$ est définie par le produit scalaire :

$$d\mathcal{C} = \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (12)$$

Soit en coordonnées cartésiennes :

$$d\mathcal{C} = A_x dx + A_y dy + A_z dz \quad (13)$$

et en coordonnées cylindriques :

$$d\mathcal{C} = A_r dr + A_\theta r d\theta + A_z dz \quad (14)$$

Lors d'un déplacement entre deux points A et B éloignés, on passe à l'intégrale :

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (15)$$

Remarque : La circulation d'un vecteur, le long d'une courbe, est une notion mathématique introduite en analyse vectorielle.

¹⁸ Voir le cours de Mécanique de S1.

4.2. Potentiel électrique.

Calculons la circulation du vecteur *champ électrique* \vec{E} , créé par une charge fixe Q , lors d'un déplacement élémentaire $\overline{MM'} = \overline{dl}$:

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (16)$$

En coordonnées polaires, l'expression du champ se limite à sa composante radiale, par conséquent :

$$d\mathcal{C} = E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr$$

Or $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr$ n'est autre que la dérivée de $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ donc :

$$E dr = -d \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \right]$$

Le vecteur \vec{E} dérive d'une fonction scalaire : $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C$ (17)

appelée "*potentiel électrique*". Si l'on convient que le potentiel est nul à l'infini, la constante C s'annule, et on a :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (18)$$

On peut écrire¹⁹ :
soit

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV \quad (19)$$

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -dV$$

Ce résultat, trouvé dans le cas d'une seule charge source, est général :

Le champ électrostatique dérive d'un potentiel scalaire V .

Ses composantes sont :

- en coordonnées cartésiennes :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (20)$$

- en coordonnées cylindriques :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (21)$$

La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe allant de A vers B est obtenue par l'intégration, entre ces deux points, du champ électrique. Elle est égale à la variation du potentiel électrique entre les positions A et B et ne dépend pas du chemin suivi. Elle est donnée par la relation :

¹⁹ En analyse vectorielle on introduit le "*gradient*", l'expression (19) devient $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dV = V_A - V_B$$

Cette expression montre que²⁰ :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (22)$$

La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe fermée quelconque est nulle.

4.3. Potentiel électrique créé par plusieurs charges, par une distribution de charges.

Comme pour le champ électrique, on applique le principe de superposition en raison de l'additivité algébrique des potentiels. Ainsi, le potentiel créé par n charges fixes $Q_1, Q_2, Q_3, Q_i \dots Q_n$, est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \quad (23)$$

Cette expression montre que *le potentiel électrostatique est, comme le champ, une fonction du point, calculée à partir des charges sources.*

Lorsque la charge Q est répartie sur un fil avec une densité linéique $\lambda = dQ/dl$
 et dans le cas d'une distribution continue superficielle de charges $\sigma = dQ/dS$
 ou d'une distribution volumique $\rho = dQ/dV$
 on procède comme pour le calcul du champ et on obtient respectivement :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{r} dl, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma}{r} dS \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho}{r} dV \quad (24)$$

Exemple : Calcul du champ et du potentiel créés par une charge Q , portée par un disque plein de faible épaisseur, en un point M sur l'axe oz . La charge est uniformément répartie sur le disque. Soit $Q = \sigma S$ où σ représente la densité de charge superficielle et $S = \pi R^2$ la surface du disque.

Calcul du champ électrique : On calcule le champ par la méthode directe en un point M d'ordonnée z :

Prenons un élément de charge $dQ = \sigma dS$ sur le disque, il crée au point M un élément de champ électrique :

$$d\vec{E}_1 = \frac{KdQ}{PM^2} \vec{u}$$

Tout plan contenant (oz) est plan de symétrie de la distribution, donc pour tout point M de (oz) , le champ électrique total $\vec{E}(M)$ est porté par l'axe (oz) .

Un bon choix de l'élément de surface peut simplifier considérablement le calcul du champ électrique créé par tout le disque.

On utilise, dans ce cas, comme élément de surface une *couronne élémentaire* de rayon r , d'épaisseur dr (figure I.12).

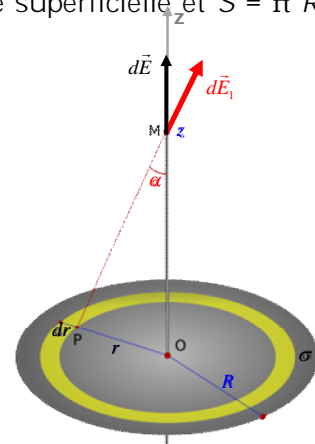


Figure I.12

²⁰ Le signe \oint signifie que la circulation est calculée le long d'un contour fermé.

La surface de cette couronne est:

$$dS = 2\pi r dr$$

Le champ électrique, créé par cette couronne élémentaire de charge, est, pour des raisons de symétrie, porté par l'axe \vec{oz} . En un point M de \vec{oz} on a :

$$dE = \frac{K\sigma dS}{PM^2} \cos \alpha$$

et le champ électrique total au point M créé par le disque est $E(M) = \int dE$.

Afin de prendre en compte toute la surface chargée du disque, on intègre suivant le rayon r entre 0 et R . Pour cela, on exprime tout en fonction de cette variable r :

Comme : $\cos \alpha = \frac{z}{PM}$ et $PM^2 = z^2 + r^2$,

le champ total devient :

$$E = 2\pi K\sigma z \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right]_0^R$$

Avec le changement de variable $u = z^2 + r^2$ et $du = 2r dr$, on obtient :

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right]_0^R \quad \text{ou encore :} \quad E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$

$$\text{- Pour } z > 0, |z| = +z \text{ et on a : } E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \quad (a)$$

$$\text{- Pour } z < 0, |z| = -z \text{ et on a : } E(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \quad (b)$$

Calcul du potentiel électrique : En utilisant la circulation du champ électrique le long de la ligne de champ (oz), nous avons :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dz \Rightarrow V = -\int E(z) dz$$

Pour $z > 0$ et en utilisant l'expression (a) du champ $E(z)$ avec le changement de variable $u = z^2 + r^2$ et $du = 2r dr$, on obtient le potentiel :

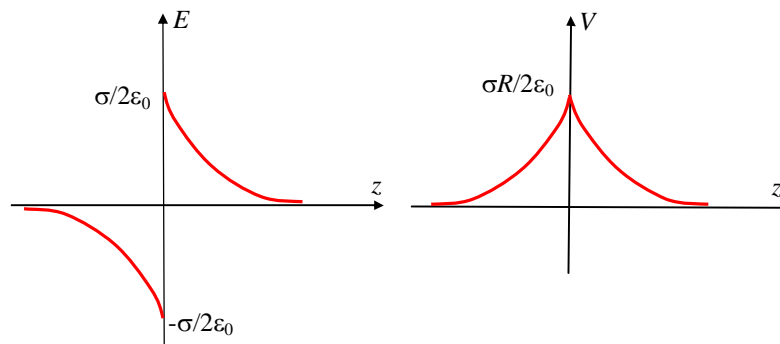
$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} - z \right] + C^{te}$$

De la même manière, pour $z < 0$, on obtient :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R^2} + z \right] + C^{te}$$

Le calcul de la constante se fait en supposant que lorsque $z \rightarrow \infty$ on a $V=0$ et $C^{te} = 0$

On peut noter la continuité, au point $z = 0$, du potentiel et la discontinuité du champ.



Tracés des graphes de $E(z)$ et $V(z)$

Exercice I.6. Reprendre, pour cette même distribution de charges, le calcul du potentiel électrique V par la méthode directe puis déduire l'expression du champ électrique.

5. TOPOGRAPHIE DU CHAMP ELECTRIQUE.

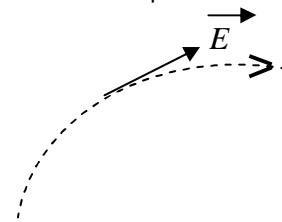
La présence de charges sources dans une région de l'espace modifie les propriétés électriques de celle-ci en créant, en chaque point M , un champ électrique. On introduit alors le concept de *lignes de champ*.

Le tracé de ces lignes donne une représentation spatiale du champ.

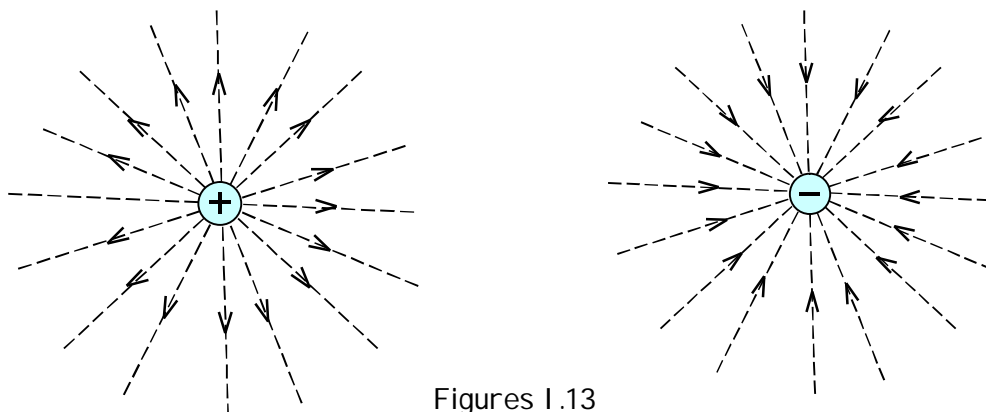
5.1. Ligne de champ.

Une ligne de champ est une courbe orientée à laquelle est tangente, en chacun de ses points, le champ électrique.

L'orientation de cette ligne suit celle du champ électrique.



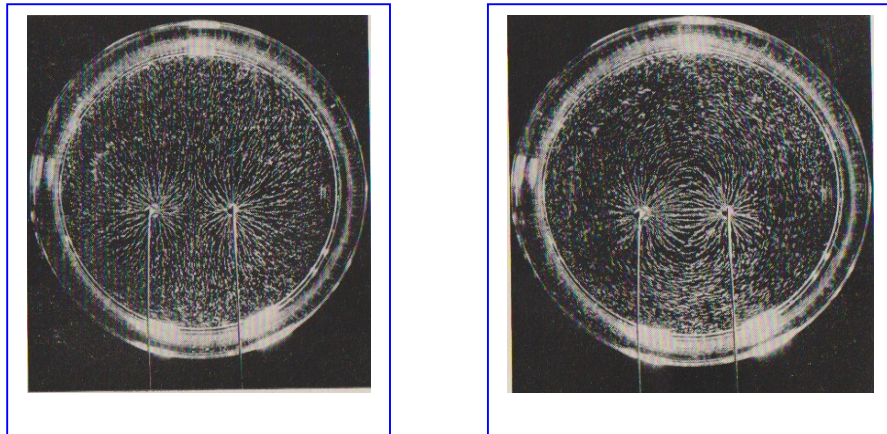
Les figures I.13 représentent les lignes de champ dues à une seule charge source Q . Si celle-ci est positive (+) le champ est dirigé de la charge vers l'extérieur. Si la charge est négative (-), le champ est dirigé de l'extérieur vers la charge.



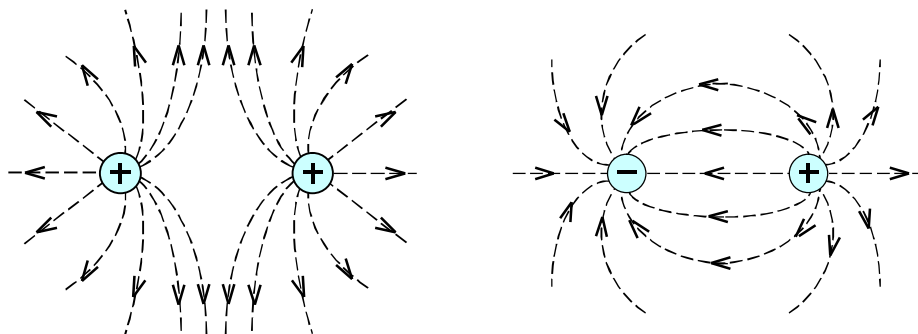
Figures I.13

Faraday a introduit le concept de champ, en observant les lignes du champ magnétique (voir Ch IV) dues à un aimant. Il les a visualisées en répandant, autour de l'aimant de la limaille de fer.

De la même façon on peut visualiser les lignes du champ électrique à l'aide de graines de gazon plongées dans un liquide isolant comme le montrent les photographies ci-dessous. Elles représentent respectivement les lignes de champ de deux charges égales positives (à gauche) et celles de deux charges égales et de signes contraires (à droite). Cette disposition des lignes de champ donne la nette impression que les charges de même signe se repoussent et que les charges de signes contraires s'attirent.

Photographies extraites de "*La Physique*" PSSC Dunod 1970 page 470

Figures I.14



Chaque charge source crée des lignes de champ telles qu'elles sont représentées sur les figures I.13. La mise en présence de deux charges, d'égale valeur, entraîne une déformation des lignes de champ et on obtient une nouvelle topographie (figures I.14). En chaque point, la ligne de champ est tangente au champ résultant.

5.2. Tube de champ.

Un tube de champ ou tube de forces est une surface formée par des lignes de champ qui s'appuient sur une courbe fermée. Si on limite le tube de champ par des sections terminales, il constitue une surface fermée.

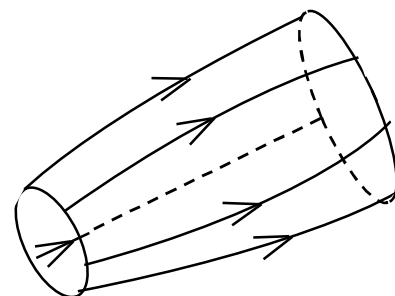


Figure I.15

5.3. Surface équipotentielle.

On appelle surface équipotentielle, une surface S dont tous les points sont au même potentiel V .

a) Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles qu'elles rencontrent.

En considérant un très petit déplacement $\overrightarrow{MM'} = d\vec{l}$ sur une surface équipotentielle (figure I.16) on trouve :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$$

Par conséquent \vec{E} est perpendiculaire à $\overrightarrow{MM'}$

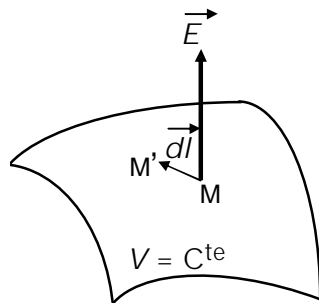


Figure I.16

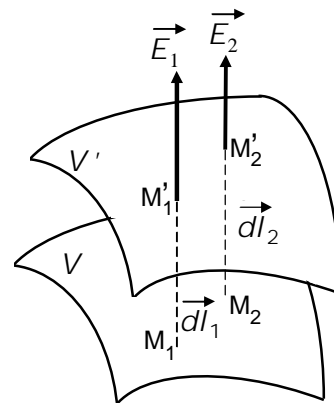


Figure I.17

b) Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ.

En effet, un déplacement infiniment petit $\overrightarrow{MM'} = d\vec{l}$, dans le sens de \vec{E} sur la ligne de champ, entraîne :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = -|\vec{E}| |\overrightarrow{MM'}|$$

$$dV < 0 \Rightarrow V_{M'} < V_M.$$

La ligne de champ est donc orientée du potentiel le plus élevé au potentiel le moins élevé.

c) Le champ électrique est plus intense là où les équipotentielles sont les plus resserrées.

En effet, si l'on considère deux très petits déplacements (figure I.17)

$$\overrightarrow{M_1M'_1} = d\vec{l}_1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_2M'_2} = d\vec{l}_2$$

on a :

$$dV = -\vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{M_1M'_1} = -\vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 = -|\vec{E}_1| |d\vec{l}_1|$$

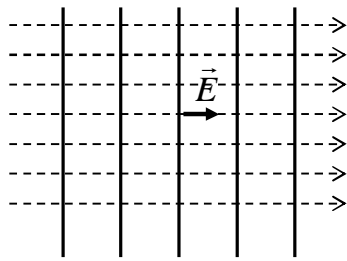
et

$$dV = -\vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{M_2M'_2} = -\vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 = -|\vec{E}_2| |d\vec{l}_2|$$

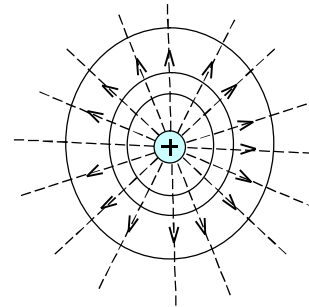
et comme

$$|d\vec{l}_1| < |d\vec{l}_2| \Rightarrow |\vec{E}_1| > |\vec{E}_2|.$$

Dans le cas d'un champ uniforme les lignes de champ sont des droites parallèles et les surfaces équipotentiellees sont des plans perpendiculaires à ces droites.



Figures I.18



Dans le cas d'une charge ponctuelle, les surfaces équipotentiellees sont des sphères concentriques de centre O et les lignes de champ sont radiales (figures I.18).

La figure I.19 représente le cas de deux charges électriques égales et opposées : les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentiellees. Sur ces figures, les lignes de champs sont représentées en pointillés et les traces des équipotentiellees en traits continus.

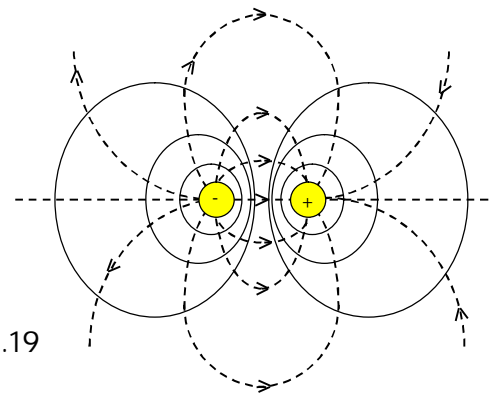


Figure I.19

6. TRAVAIL & ENERGIE.

6.1. Travail de la force électrique.

On place une charge électrique q en un point de l'espace où règne un champ électrique \vec{E} . Elle est alors soumise à l'action d'une force électrique :

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

Le travail de cette force lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

et, au cours d'un trajet AB, on a :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(V_A - V_B)$$

$$\text{soit} \quad W_A^B = q(V_A - V_B) \quad (25)$$

Unités : Cette équation montre que le potentiel a les dimensions d'un travail par unité de charge électrique. Dans le système M.K.S.A. le travail est mesuré en *joule* et la charge en *coulomb*. Pour mesurer le potentiel on a choisi le *volt* en hommage au physicien italien Alessandro Volta qui a inventé, en 1800, la pile électrique.

Le champ électrique est alors mesuré en *volt par mètre* comme le montre l'équation (19)

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$$

6. 2. Energie potentielle.

L'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ extérieur est définie comme le travail de la force électrostatique agissant sur la charge, pour un déplacement de celle-ci du point M, où elle est située et où le potentiel est V_M , à un point de référence R, où la charge n'est plus soumise à l'action du champ extérieur. En ce point, le potentiel est nul : $V_R = 0$

Soit

$$E_p(M) = \int_M^R \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_M^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(V_M - V_R) \quad (26)$$

Or $V_R = 0$ par conséquent $E_p(M) = qV_M$

La force de Coulomb est donc conservative et son travail entre deux points quelconques ne dépend pas du chemin suivi. Elle dérive d'une énergie potentielle $E_p(M) = qV + C^{te}$ et l'on écrit

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p(M) \quad (27)$$

6. 3. Energie interne d'une distribution de charges électriques.

Nous nous limitons, ici, à deux charges électriques. L'énergie interne d'un système de deux charges est définie comme le travail fourni par un opérateur pour assembler les deux charges, initialement sans interaction. C'est l'énergie potentielle de la deuxième charge dans le champ de la première (ou l'énergie potentielle de la première charge dans le champ de la seconde).

Soient deux charges q_1 et q_2 placées respectivement aux points M_1 et M_2 distants de $M_1M_2 = r_{12}$. Afin de définir l'énergie interne du système des deux charges, on suppose que la charge q_1 placée en M_1 est fixe et que la charge q_2 se rapproche jusqu'en M_2 depuis une position infiniment éloignée.

Le travail que devrait fournir un opérateur pour rapprocher la charge q_2 jusqu'en M_2 sans variation d'énergie cinétique (c'est-à-dire très lentement) est donné par :

$$W_{op} = \int_{\infty}^{M_2} \vec{F}_{op} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{M_2} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{l} = -q_2 \int_{\infty}^{M_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} \quad (28)$$

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est la force électrostatique qu'exerce la charge q_1 sur la charge q_2 . Soit alors

$$U = W_{op} = q_2 V_1 = \frac{K q_1 q_2}{r_{12}} \quad (29)$$

Cette dernière expression représente l'énergie interne du système des deux charges q_1 et q_2 .

Dans le cas d'un nombre N de charges on trouve (Exercice I. 11)

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{K q_j}{r_{ij}} \quad \text{Soit} \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(i) \quad (30)$$

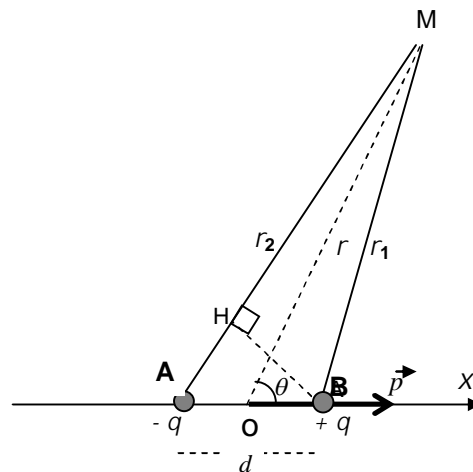
7. LE DIPOLE ELECTRIQUE.

7.1. Moment dipolaire électrique.

Le dipôle électrique est constitué de deux charges égales et de signes contraires, $+q$ et $-q$, séparées d'une distance d . Celle-ci est très petite par rapport aux distances d'observation r .

$$d \ll r \quad (31)$$

Figure I.20



Un dipôle est caractérisé par son "*moment dipolaire électrique*" ou "*moment électrique*" :

$$\vec{p} = q \vec{d} \quad (32)$$

Le moment électrique est orienté de la charge négative vers la charge positive.

7.2. Potentiel électrique créé par un dipôle.

Calculons le potentiel V produit, par ce dipôle, en un point M situé à une distance r du milieu O du dipôle:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad (33)$$

Par définition $d \ll r$. Soit H la projection de B sur AM :

$$AH \approx d \cos \theta \approx r_2 - r_1$$

θ désigne l'angle formé par r et la direction du dipôle \vec{p} . Il est pratiquement égal aux angles θ_1 formé par \vec{p} et AM et θ_2 formé par \vec{p} et BM . D'autre part, on peut faire les approximations :

$$r_2 \approx r_1 \approx r$$

Par conséquent le potentiel créé en M , par le dipôle, est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (34)$$

7.3. Calcul du champ électrique créé par un dipôle.

La relation entre le champ et le potentiel est,

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

soit en coordonnées polaires (figure I. 21):

$$dV = -(E_r dr + E_\theta r d\theta) = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) d\theta \quad (35)$$

On obtient à partir de (34) et (35), les composantes du champ électrique en coordonnées polaires :

$$E_r = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\theta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3} \quad (36)$$

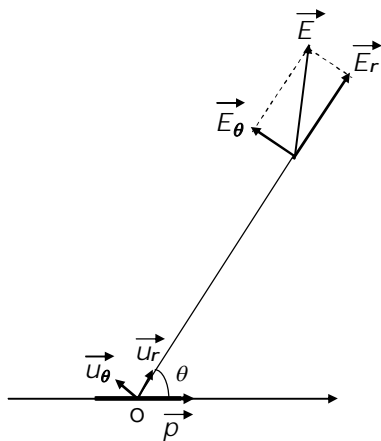


Figure I.21

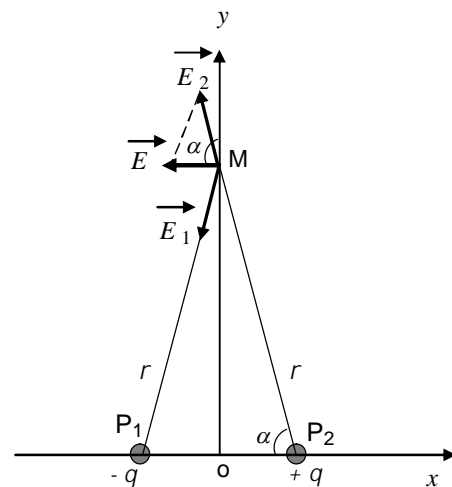


Figure I.22

Exercice I.4. Calculer directement le champ créé par un dipôle

1°) en un point M' sur l'axe ox du dipôle.

2°) en un point M situé sur l'axe oy perpendiculaire au dipôle en son milieu O

Solution I.4. 1°) Calcul du champ en M' sur l'axe ox :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(x-a)^2} - \frac{q}{(x+a)^2} \right] \vec{i} \quad \text{où} \quad d = 2a$$

Après calculs et en négligeant a^2 devant r^2 on trouve : $\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{x^3}$

2°) Calcul du champ en M sur oy : Les deux triangles isocèles MP_1P_2 et $E_2 E M$, de la figure I.22, sont semblables. Donc

$$\frac{E}{E_2} = \frac{d}{r} \quad \text{et avec} \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \text{on a :} \quad \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$$

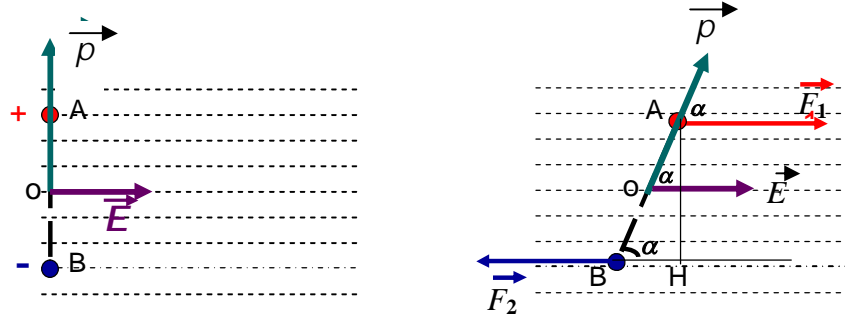
Soit, en négligeant a^2 devant r^2 : $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{y^3}$

7.4. Dipôle placé dans un champ électrique uniforme.

7. 4.1. Couple.

Si on place un dipôle, de moment électrique \vec{p} , dans un champ extérieur \vec{E} uniforme, les charges qui le constituent sont soumises à des forces égales et opposées.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



Figures I.23

Le dipôle subit alors l'action d'un couple de module :

$$\Gamma = |\vec{\Gamma}| = F AH \quad \text{or} \quad F = q E \quad \text{et} \quad AH = d \sin \alpha$$

donc : $\Gamma = q E . d \sin \alpha$ sachant que $p = q d$ on a : $\Gamma = p E \sin \alpha$

Le moment du couple de force qui agit sur le dipôle s'écrit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad (37)$$

Ce couple fait pivoter le dipôle pour l'aligner parallèlement au champ extérieur (figures I.23).

7. 4.2. Energie potentielle.

L'énergie potentielle d'un dipôle, placé dans un champ \vec{E} , est calculée en faisant la somme des énergies potentielles de chaque charge :

$$E_p = q (V_A - V_B) \quad (38)$$

Avec

$$V_A - V_B = -\vec{E} \cdot \vec{d}$$

l'expression (38) devient

$$E_p = -q \vec{E} \cdot \vec{d}$$

sachant que :

$$\vec{p} = q \vec{d}$$

l'énergie potentielle de ce dipôle, placé dans un champ \vec{E} , est alors donnée par:

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (39)$$

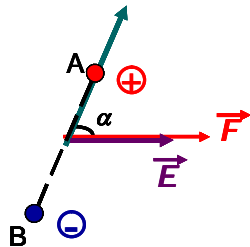


Figure I.24

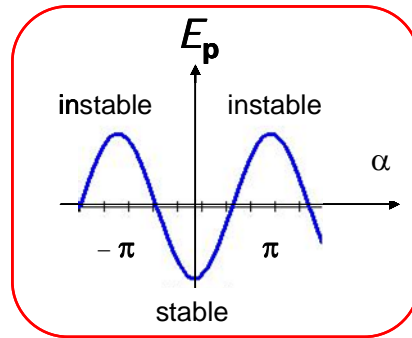


Figure I.25

Cette énergie est minimale pour : $\alpha = 0$
et maximale pour : $\alpha = -\pi$ et $\alpha = +\pi$

la position $\alpha = 0$ correspond à un équilibre stable et les positions $\alpha = -\pi$ et $\alpha = +\pi$ à un équilibre instable.

Exercice I.5. On considère un dipôle formé de deux charges électriques ($-q$ et $+q$) séparées par une distance d . A. N : $q = 2 \text{ nC}$ et $d = 9 \text{ mm}$.

1°) Quel est le module de son moment dipolaire p .

2°) Calculer son énergie interne.

3°) Ce dipôle est placé dans un champ électrique uniforme $E = 50 \text{ kV/m}$. Exprimer en joules puis en électron-volts, l'énergie potentielle maximale qui résulte de l'interaction de ce dipôle et du champ. ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)

Solution I.5. 1°) Moment dipolaire : $\vec{p} = q\vec{d}$ avec $p = 18 \cdot 10^{-12} \text{ C.m}$

2°) Energie interne :

$$U = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}} \quad \text{avec } q_1 = -q \text{ et } q_2 = +q$$

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d} \quad U = -4 \cdot 10^{-6} \text{ joule} \quad \text{soit } U = -25 \cdot 10^{12} \text{ eV}$$

3°) Energie potentielle :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \alpha$$

Cette énergie potentielle est maximale si : $\alpha = \pi \Rightarrow \cos \alpha = -1$
soit

$$E_p = 0,9 \mu\text{J} \quad \text{ou} \quad E_p = 5,6 \cdot 10^{12} \text{ eV}$$

Ces propriétés des dipôles expliquent les phénomènes de polarisation dans les diélectriques.

8. LES DIELECTRIQUES.

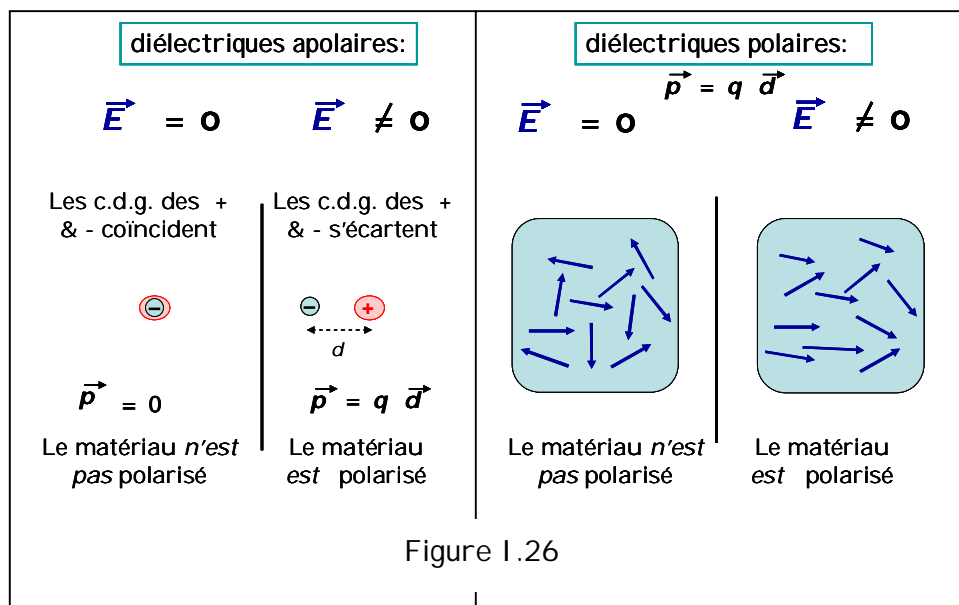
Les matériaux isolants ou diélectriques, qui ont été mis en évidence lors des phénomènes d'électrisation et les milieux magnétiques, seront étudiés en deuxième et troisième année de la licence. Le vide est le seul milieu considéré dans ce module. Néanmoins, quelques notions élémentaires seront données au sujet de ces milieux.

Il existe 2 types de diélectriques :

1°) Les diélectriques apolaires : Ils sont constitués d'atomes ou de molécules apolaires. Les barycentres des charges positives et négatives sont confondus. Le moment électrique de ces particules est nul, le milieu n'est pas polarisé.

Lorsqu'on applique un champ électrique, les charges subissent un petit déplacement d par rapport à leurs positions d'équilibre. Cela se traduit par l'apparition de dipôles, le diélectrique est alors polarisé. C'est la "*polarisation induite*".

2°) Les diélectriques polaires : Ils sont constitués de molécules polaires (HCl, H₂O ...) qui forment des dipôles. Mais, en raison de l'agitation thermique, ces dipôles sont orientés au hasard, leur moment résultant est nul : le milieu n'est pas polarisé.



En présence d'un champ électrique, ces dipôles ont tendance à s'orienter dans la direction du champ. Il en résulte un équilibre statistique entre l'action du champ et celle de la température : le diélectrique est alors polarisé. C'est la "*polarisation dipolaire*". Les diélectriques sont caractérisés par une permittivité ϵ supérieure à ϵ_0 .

Dans le cas des diélectriques linéaires homogènes et isotropes, ϵ est une constante, par contre si le diélectrique est inhomogène, anisotrope ou ferroélectrique, la permittivité n'est plus constante en tout point du matériau.

Tableau I.2. Moments électriques de quelques molécules polaires.

Molécule	CO	H Br	H Cl	SO ₂	H ₂ O
$ \vec{p} $ (C.m)	$0,40 \cdot 10^{-30}$	$2,6 \cdot 10^{-30}$	$3,43 \cdot 10^{-30}$	$5,3 \cdot 10^{-30}$	$6,2 \cdot 10^{-30}$

9. THÉORÈME DE GAUSS.

9.1. Flux d'un vecteur à travers une surface.

Une surface S réelle ou fictive peut être considérée comme constituée d'un grand nombre de surfaces élémentaires dS , chacune d'elles entoure un point M de l'espace. On considère un vecteur unitaire \vec{n} porté par la normale à dS et on représente cet élément de surface par un vecteur

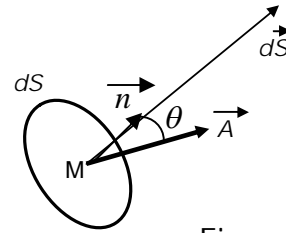


Figure I.27

$$d\vec{S} = dS \vec{n} \quad (40)$$

Soit \vec{A} un vecteur quelconque fonction du point M . On appelle flux élémentaire $d\Phi$ du vecteur \vec{A} à travers la surface dS la quantité scalaire définie comme suit :

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = A dS \cos \theta. \quad (41)$$

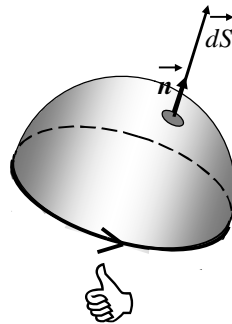
Le flux global à travers la surface S est obtenu par intégration :

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (42)$$

Remarque : Comme la circulation d'un vecteur le long d'une courbe, le flux d'un vecteur à travers une surface est une notion mathématique.

Orientation de la normale.

Cas d'une surface fermée : On oriente la normale de l'intérieur vers l'extérieur.



Figures I.28

Cas d'une surface ouverte : On choisit un sens de parcours du contour et on oriente la normale en utilisant par exemple la règle de la main droite : Le pouce donne le sens de la normale si les autres doigts sont fermés dans le sens de parcours du contour (figure I.28).

9.2. Vecteur excitation ou déplacement électrique.

Maxwell a introduit en électromagnétisme un vecteur \vec{D} qu'il a appelé *déplacement électrique*. Celui-ci est relié au champ électrique par l'expression :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (43)$$

où ϵ est la permittivité électrique du milieu.

Dans le cas particulier du vide, l'expression précédente devient

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (44)$$

Elle montre que, dans ce cas, ces deux vecteurs sont proportionnels. Ce n'est pas toujours le cas dans les milieux matériels.

Le vecteur \vec{D} est également appelé "*excitation électrique*".

9.3. Théorème de Gauss.

Le théorème de Gauss²¹ s'énonce comme suit:

Le flux du vecteur déplacement électrique à travers une surface S fermée entourant des charges Q_i est égal à la somme de ces charges.

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (45)$$

$\sum Q_i$ représente la somme *algébrique* des charges intérieures à la surface.²²

L'équation (45) est l'une des quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme (équations de Maxwell).

Dans le cas particulier du vide l'énoncé du théorème de Gauss devient :

Dans le vide, le flux du champ électrique à travers une surface *fermée* entourant des charges Q_i est :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (46)$$

De ces deux formulations du théorème de Gauss, c'est la première qui est la plus générale. En effet, les deux expressions (45) et (46) montrent que le vecteur excitation électrique est directement relié aux charges sources et ne dépend pas des caractéristiques du milieu (ici le vide caractérisé par sa permittivité électrique ϵ_0). Ce n'est pas le cas du champ électrique.

Dans les milieux, le vecteur \vec{D} prend une très grande importance.

9.4. Applications du théorème de Gauss.

Le théorème de Gauss permet, dans certains cas²³, de calculer, à partir des charges sources, le champ électrique. La méthode est alors plus simple que celle du calcul direct.

²¹ Le théorème de Gauss sera démontré en 2^{ème} année de Licence dans le module d'*Electromagnétisme* [6].

²² Pour calculer le vecteur déplacement, ou le vecteur champ électrique, on choisit une surface S qui englobe toutes les charges sources. Lorsque ces charges sont infinies, on peut, dans certains cas, exprimer ces vecteurs en fonction de la densité de charge, comme dans le cas du plan infini (§ 9.4.) et des exercices I. 13 et I.14.

²³ Notamment les problèmes qui présentent une symétrie.

Plan infini chargé

On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique $\sigma > 0$. On veut calculer le champ électrique créé par cette distribution de charges en tout point M de l'espace au voisinage de ce plan.

Champ électrique : Les équipotentielles ont la même forme que le plan chargé, elles sont constituées par des plans parallèles à ce plan. Les lignes de champ sont alors perpendiculaires au plan chargé. Le champ \vec{E} est donc perpendiculaire au plan et sortant ($\sigma > 0$).

Il est utile de noter que le calcul de ce champ peut être obtenu par la méthode directe du calcul du champ électrique en considérant les résultats obtenus pour le disque chargé de rayon R (§ 4.3.) et en faisant tendre R vers l'infini. Il est cependant plus rapide d'arriver au résultat en utilisant le théorème de Gauss.

On choisit comme surface de Gauss un cylindre qui traverse ce plan infini chargé. (figure I. 29)

Le flux de \vec{E} à travers ce cylindre est :

$$\Phi = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$$

$S_1 = S_2 = S$ sont les surfaces des bases du cylindre et S_3 est sa surface latérale.

Comme le montre la figure I.29, le champ est, pour des raisons de symétrie, perpendiculaire au plan :

$$\vec{E} \perp d\vec{S}_3, \vec{E} \parallel d\vec{S}_1 \text{ et } \vec{E} \parallel d\vec{S}_2 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = 0, \quad \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = E dS$$

et

$$\sum_i Q_i = \sigma S$$

donc

$$\Phi = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Notons que le champ électrique créé par le plan infini chargé est constant en tout point M de l'espace.

Potentiel électrique : En utilisant la relation liant le potentiel au champ électrique

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dy \Rightarrow V = -\int E dy$$

on trouve le potentiel V , créé par le plan infini :

$$V = -\frac{\sigma y}{2\epsilon_0} + C^{te},$$

La constante s'obtient à l'aide des conditions du problème.

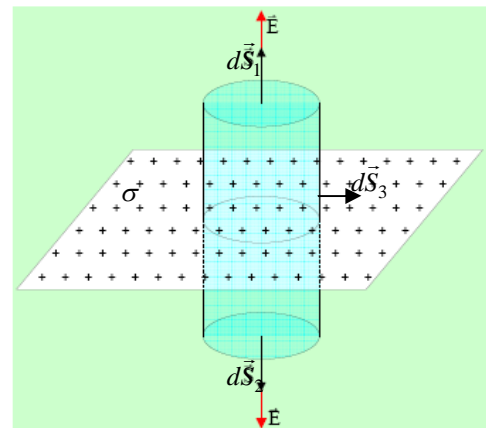


Figure I.29

En résumé :

Le champ électrique \vec{E} peut être calculé :

1°) directement à partir des expressions (5), (6) (7), (8), (9) selon le nombre ou la répartition des charges sources.

2°) à partir du potentiel V (19), (20), (21)

3°) à partir du théorème de Gauss (46) : $\iint_S \epsilon_o \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i Q_i$

Tableau I.2. Equations de Maxwell en électrostatique

Au cours de ce premier chapitre nous avons mis en évidence deux équations de Maxwell que nous présentons, ci-dessous, sous forme intégrale

Champ conservatif	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	Valable uniquement en électrostatique
Théorème de Gauss	$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i Q_i$	Valable dans tous les cas

Annexe 1

Les concepts de masse et de charge électrique

Nous avons fait remarquer que, si l'on ne tient pas compte des effets quantiques, une particule matérielle est caractérisée par sa masse et sa charge électrique (§ 3.5.).

La masse apparaît en physique sous l'aspect de deux grandeurs qui, au premier abord, semblent complètement différentes : la masse d'attraction source du champ de gravitation et la masse d'inertie qui traduit l'aptitude d'un corps à résister à toute variation de vitesse. Or aucune expérience n'a pu mettre en évidence une différence entre ces deux masses²⁴.

Avec la relation fondamentale de la dynamique, les relations (3) et (3') s'écrivent :

$$m \vec{a} = q \vec{E}$$

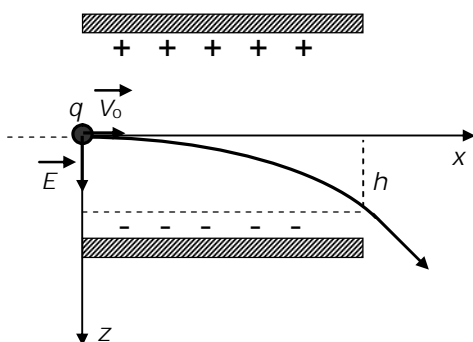
$$m \vec{a} = m \vec{g}$$

\vec{a} désigne l'accélération de la particule.

Au premier membre de chaque relation, m représente une même grandeur physique la "masse d'inertie". Par contre au second membre, ce sont deux grandeurs différentes qui apparaissent. Dans la deuxième équation, si on simplifie par m , on obtient :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Un problème de dynamique se transforme en un problème de cinématique. En outre, on obtient une équivalence entre un champ d'accélération et un champ de gravitation, c'est la raison pour laquelle g est tantôt appelé "*champ de la pesanteur*"²⁵, tantôt "*accélération de la pesanteur*". C'est sur cette équivalence que s'est basé Einstein pour élaborer la théorie de la relativité générale.

Exercice I. 6 . Mouvement d'une particule dans un champ électrique²⁶

Une particule de masse m portant une charge électrique q , animée d'une vitesse constante V_0 parallèle à l'axe ox (figure ci-contre) entre dans un champ électrique uniforme parallèle à oz . Le champ agit sur une distance $ox = L$ (L étant la longueur des plaques d'un condensateur).

Trouver la valeur $z = h$ qui correspond à la sortie de la particule du champ.

A.N. $L = 1,25\text{cm}$, $q = -1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$, $V_0 = 10^7\text{m/s}$

$m = 9,11 \times 10^{-31}\text{ kg}$, $E = 250\text{V/cm}$,

²⁴ Les expériences d'Oetvös en 1889, à l'aide d'une balance de torsion, ont montré l'égalité de la masse d'inertie et de la masse d'attraction avec une précision de l'ordre de 10^{-9} .

²⁵ Le champ de gravitation est appelé "champ de la pesanteur" au voisinage de la terre.

²⁶ Ce champ est créé par des charges sources réparties sur la surface des plaques du condensateur.

Solution I.6. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans ce cas :

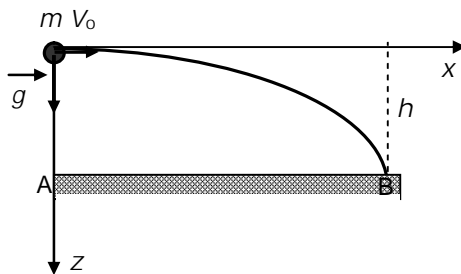
$$m \vec{a} = q \vec{E} \Rightarrow \begin{cases} m \frac{dV_z}{dt} = q E & \Rightarrow V_z = \frac{q}{m} E t + 0 = \frac{dz}{dt} \\ m \frac{dV_x}{dt} = 0 & \Rightarrow V_x = V_o + 0 = \frac{dx}{dt} \end{cases}$$

Après intégration, il vient :

$$z = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E t^2 \quad \text{et} \quad x = V_o t \quad \text{soit :} \quad z = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{E}{V_o^2} x^2$$

Pour $x = L$ on a $z = h$ d'où $h = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{E}{V_o^2} L^2 = 0,343 \text{ cm}$

Exercice I.7. Mouvement d'un projectile dans le champ de la pesanteur



Un avion vole à une altitude h le long d'un axe ox parallèle au sol horizontal, avec une vitesse constante V_o . En O qui se trouve à la verticale d'un point A du sol, il lâche, dans le champ de la pesanteur g , un projectile de masse m . Ce dernier touche le sol en un point B tel que $AB = L$. A quelle altitude l'avion a-t-il lâché son projectile. On néglige la résistance de l'air.

A.N. $L = 2600 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $V_o = 750 \text{ km/h}$,

Solution I.7 : La relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans ce cas :

$$m \vec{a} = m \vec{g} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dV_z}{dt} = g & \Rightarrow V_z = g t + 0 = \frac{dz}{dt} \\ \frac{dV_x}{dt} = 0 & \Rightarrow V_x = V_o + 0 = \frac{dx}{dt} \end{cases}$$

Après intégration, il vient :

$$z = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{et} \quad x = V_o t \quad \text{soit :} \quad z = \frac{1}{2} \frac{g}{V_o^2} x^2$$

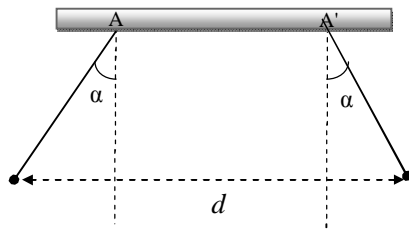
Pour $x = L$ on a $z = h$ d'où $h = \frac{1}{2} \frac{g}{V_o^2} L^2 = 767 \text{ m}$

N.B : Ces deux exercices montrent que, dans le cas du champ électrique, nous avons un problème d'électrodynamique où les caractéristiques de la particule interviennent. Par contre dans le cas du champ de la gravitation (ici la pesanteur), le problème s'est transformé, en raison de l'équivalence entre la masse d'inertie et la masse d'attraction, en un problème de cinématique.

Exercices : Chapitre I

Exercice I. 8.

Soient deux pendules électriques, formés de deux boules conductrices de masses m , suspendues par des fils de soie de longueurs l , aux points A et A' (voir figure). Les deux boules sont électrisées de la même façon et portent alors une même charge q . Disposés comme l'indique la figure, les deux pendules s'écartent d'un même angle α .



1°) Déterminer la valeur de la charge q .

2°) Sachant que q est négative, représenter le vecteur champ électrique créé par ce système en M, milieu de AA' et calculer son intensité.

On donne : $l = 10 \text{ cm}$; $m = 1 \text{ g}$; $OO' = d = 7 \text{ cm}$; $b = AA' = 5 \text{ cm}$.

Exercice I.9.

Trois charges ponctuelles $-q$, $+q$ et $+q$ sont placées respectivement aux sommets A, B, C d'un triangle équilatéral de côté a . $A(-q)$, $B(+q)$, $C(+q)$.

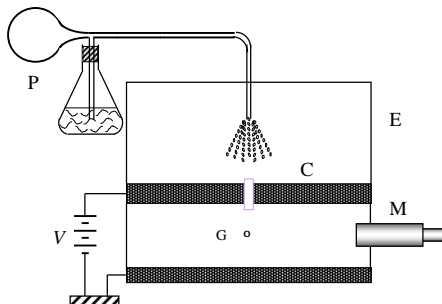
1/ Déterminer le champ électrique résultant \vec{E} en G, centre de gravité du triangle ABC.

2/ Calculer l'énergie interne du système formé par ces trois charges.

AN : $a = 10 \text{ cm}$, $q = 2 \text{ nC}$

Exercice I.10. Expérience de la goutte d'huile.

L'appareil qui a servi à Millikan pour mesurer la charge de l'électron et dont un schéma simplifié est représenté sur la figure, comporte essentiellement une enceinte E, à l'intérieur de laquelle se trouve un condensateur C dont l'armature supérieure est munie d'un orifice,



un pulvérisateur P, une source de tension continue V et un microscope M.

La goutte d'huile s'électrise par frottement à la sortie du pulvérisateur P, elle passe à travers l'orifice dans le champ électrique qui règne entre les armatures du condensateur. On éclaire à l'aide d'une source de lumière et on observe le mouvement de la goutte G au microscope. Ce dernier porte des graduations pour repérer les différentes positions de G. On néglige, dans cet exercice, la poussée d'Archimède

1°) Le condensateur n'est pas relié à la source de tension, la goutte n'est soumise qu'à son propre poids et au frottement visqueux de l'air. Ecrire l'équation différentielle du mouvement et en déduire l'expression de la vitesse limite de G. Calculer le rayon R de la goutte sphérique sachant que :

La masse volumique de l'huile est $\rho = 896 \text{ kg/m}^3$, le coefficient de viscosité de l'air est $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ S.I.}$, et $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. La vitesse limite v_1 est mesurée à partir de la distance $\Delta l = 2,25 \text{ mm}$, parcourue par la goutte en $\Delta t = 10 \text{ s}$.

2°) Le condensateur est, à présent, relié à la source de tension, la goutte est soumise, en plus des forces précédentes, à une force électrique, on considère le cas où la goutte est chargée négativement, sinon on inverse la polarité des armatures du condensateur.

Ecrire l'équation du mouvement et en déduire la charge électrique de la goutte d'huile.

Comparer cette charge à celle de l'électron. Conclusion.

A.N. tension appliquée : $V = 600$ volts, distance entre les armatures : $d = 6$ mm et charge de l'électron : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. La mesure de la vitesse limite a donné : $v_2 = 1,27 \cdot 10^{-4}$ m/s.

Exercice I.11. Calculer l'énergie interne d'un système composé de 3 charges ponctuelles q_1, q_2, q_3 .

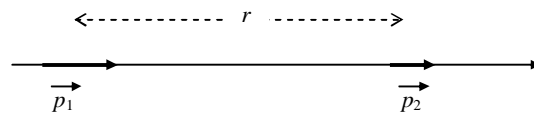
Généraliser au cas de n charges $q_1, q_2, q_3, \dots, q_i, \dots, q_n$

Exercice I.12. 1°) Exprimer, sous forme vectorielle, le champ \vec{E} créé par un dipôle électrique de moment dipolaire \vec{p} .

2°) En déduire l'énergie potentielle d'un dipôle, de moment \vec{p}_1 , placé à une distance r d'un dipôle de moment dipolaire \vec{p}_2

3°) Considérer le cas où les deux dipôles sont alignés sur la droite qui les joint.

A.N : $p_1 = p_2 = 6,1 \cdot 10^{-30}$ C.m , $r = 3 \cdot 10^{-10}$ m



Exercice I .13. Calculer, en utilisant le théorème de Gauss, 1°) le champ et 2°) le potentiel créés, à une distance r de son centre, par une sphère pleine, de rayon R , uniformément chargée dans les deux cas suivants :

La charge électrique est répartie uniformément avec une densité surfacique σ .

Elle est répartie uniformément avec une densité volumique ρ .

Représenter, dans chaque cas, les variations du champ et du potentiel en fonction de r .

Exercice I .14. On considère un fil de longueur infinie portant une charge électrique répartie avec une densité linéique λ . Calculer la valeur du champ électrique en un point M situé dans un plan perpendiculaire au fil et à une distance D .

1°) Utiliser d'abord le théorème de Gauss

2°) Puis, effectuer le calcul direct

3°) En déduire le potentiel en M.