MODULE DE MÉCANIQUE

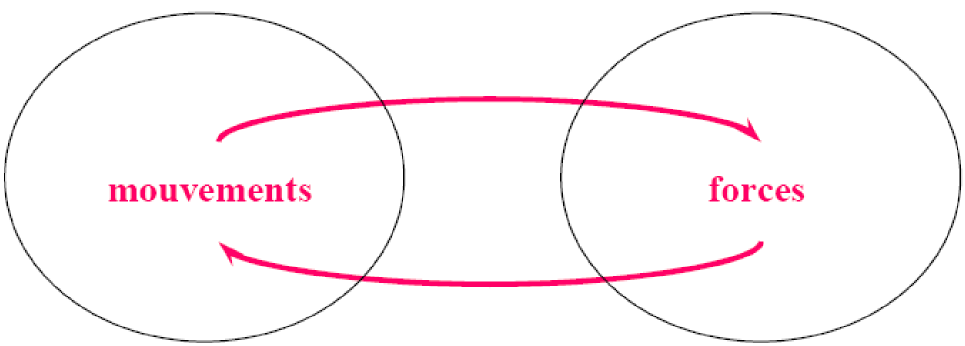
Plan du cours

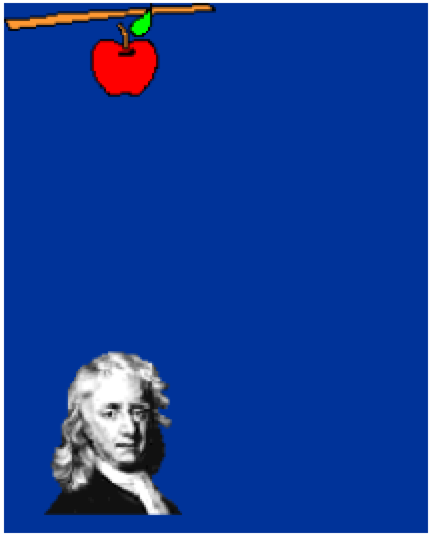
- Rappels Vectoriels
- Cinématique du point
- Dynamique du point
- Travail et énergie

Dynamique du point

I-1- Définition :

La dynamique est une branche de la mécanique qui étudie les mouvements des corps dans l'espace en fonction du temps en expliquant les causes qui les provoquent.





I-2-Historique :

Historiquement, l'étude des mouvements des planètes a permis d'établir les lois cinématiques et dynamiques

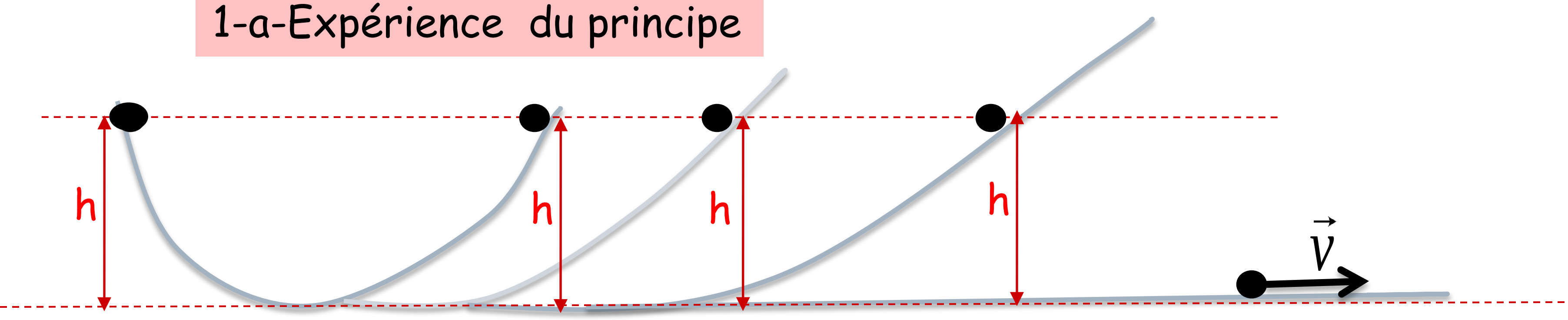
Copernic (1473-1543)

Johannes Kepler (1571-1630)

Galilée (1594–1642)

II -1- Principe d'inertie

1-a-Expérience du principe



1-b-Enoncé du principe

Si une particule n'est soumise à aucune interaction:

-Soit elle reste au repos

-Soit elle continue à se déplacer suivant une droite et avec une vitesse constante

1-c-Référentiel d'inertie ou Galiléen

Les repères dans lesquels une particule libre se déplace à vitesse constante sont appelés repères Galiléen ou d'inertie

Ces repères sont soit au repos, soit animés d'un mouvement de translation uniforme

Exemple:

Le repère lié au sol satisfait à la définition et est donc un bon repère d'inertie

II-2-Quantité de mouvement :

2-a-Notion de masse :

Il faut analyser, d'une manière dynamique, le mouvement d'un corps.

La cause qui modifie la grandeur ou la direction de la vitesse d'un objet est: La force

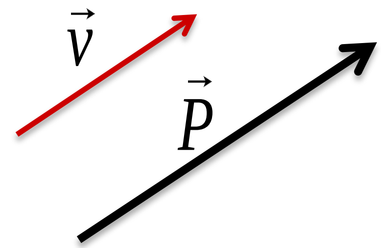
La masse est un coefficient qui distingue un objet d'un autre. Elle caractérise l'inertie du corps.

C'est-à-dire sa résistance à s'opposer à tout changement provoqué par la vitesse. Elle est très importante lors de l'étude dynamique.

2-b- Quantité de mouvement

Elle est définie comme le :produit de la masse par la vitesse :

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad (kgm/s)$$



$\vec{P}$ et $\vec{v}$: sont parallèles et dans le même sens

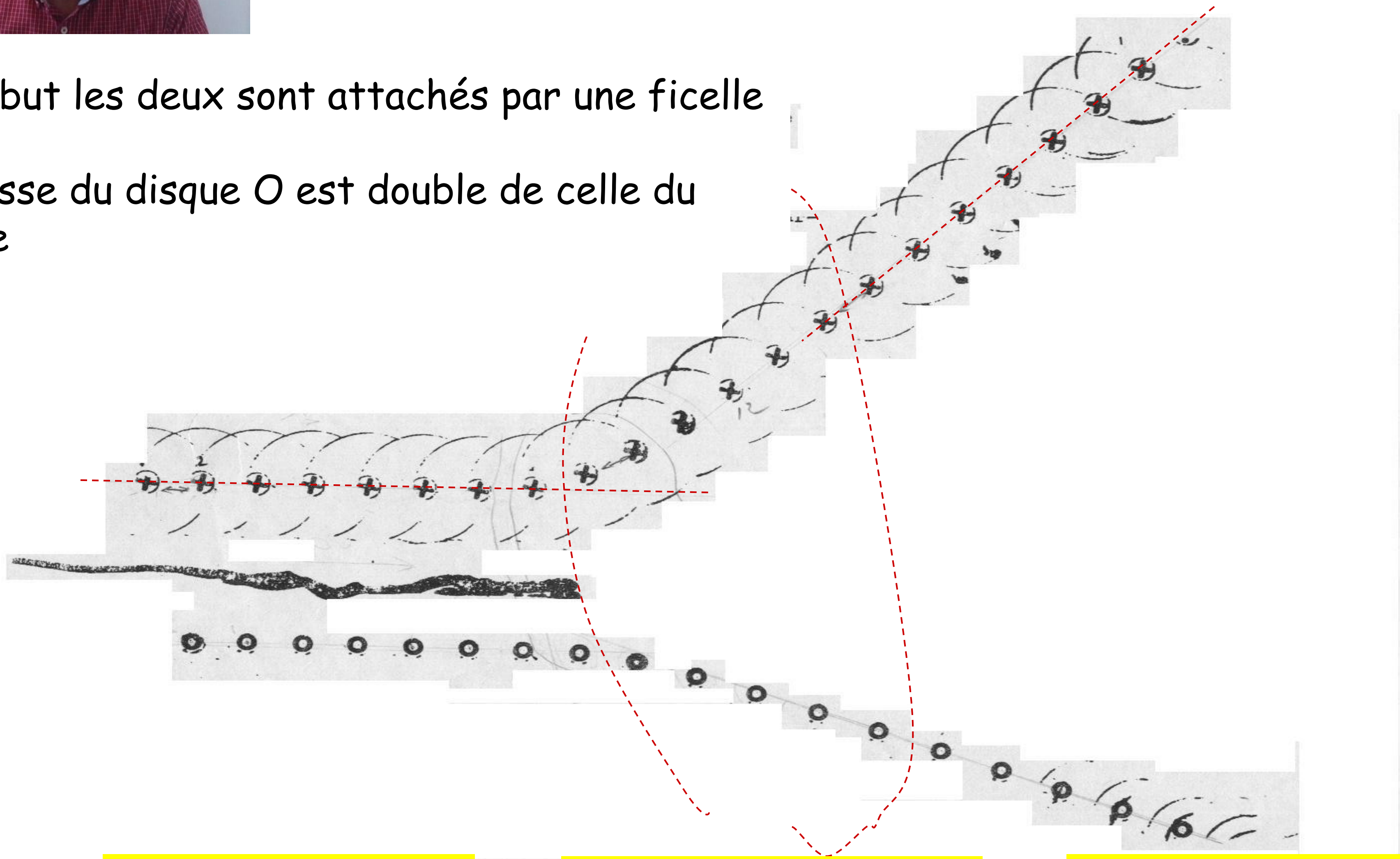
Le principe d'inertie s'écrit :

Une particule libre se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère Galiléen

2-c- Conservation de la quantité de mouvement

Au début les deux sont attachés par une ficelle

La masse du disque O est double de celle du disque



Avant interaction

pendant interaction

Aprés interaction

2-c- Conservation de la quantité de mouvement

On cherche la quantité de mouvement totale du système dans les trois phases

$M_o = 2\ M_x$

Pour déterminer la vitesse on calcule les distances parcourues entre deux positions successives de chaque masse

Avant interaction :

Si do et dx sont les distances parcourues par chaque disque respectivement pendant le temps Δt :

$$P_o = m_o v_o = m_0 \frac{d_o}{\Delta t}$$

$$P_x = m_x v_x = m_x \frac{d_x}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_T = \vec{P}_o + \vec{P}_x$$

2-c- Conservation de la quantité de mouvement

Pendant interaction :

$$P'_o = m_o v'_o = m_0 \frac{d'_o}{\Delta t}$$

$$P_x' = m_x v'_x = m_x \frac{d'_x}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_T' = \vec{P}_o' + \vec{P}_x'$$

Aprés interaction :

$$P'_o = m_o v'_o = m_0 \frac{d'_o}{\Delta t}$$

$$P_x' = m_x v'_x = m_x \frac{d'_x}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_T'' = \vec{P}_o'' + \vec{P}_x''$$

2-c- Conservation de la quantité de mouvement

On récapitule, dans le tableau suivant, les calculs effectués dans chaque phase en fonction de la masse m_x

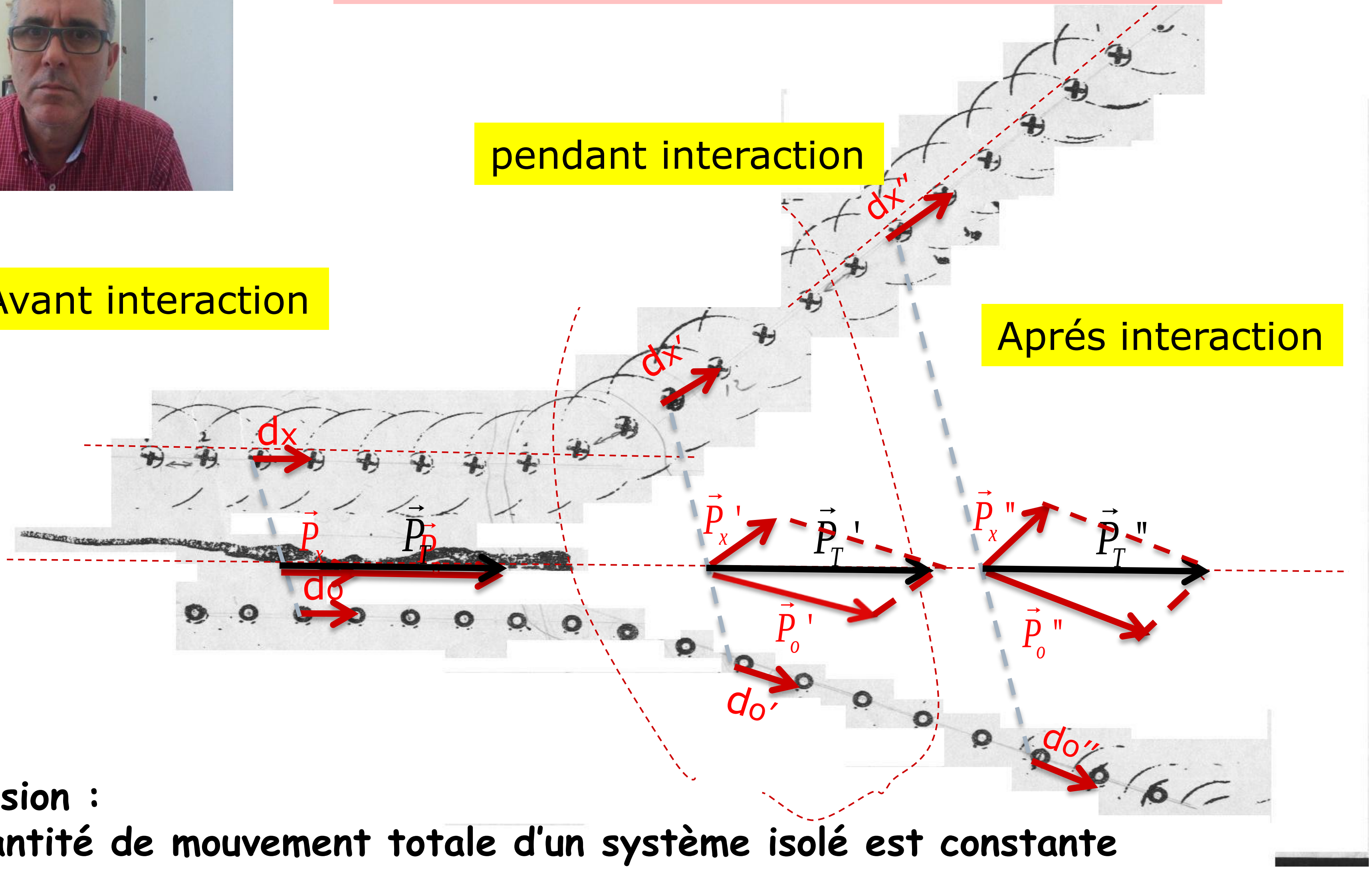
$M_0 = 2M_x$

$\Delta t = 0.1\ s$

Zones	Distances (cm)	Vitesse (cm/s)	Quantité de mvt(kgm/s)
Avant	$d_0 = 1cm$ $d_x = 1cm$	$V_0 = 10$ $V_x = 10$	$P_0 = 20m_x$ $P_x = 10m_x$
Pendant	$d_0' = 1.1cm$ $d_x' = 1.2cm$	$V_0' = 11$ $V_x' = 12$	$P_0' = 22m_x$ $P_x' = 12m_x$
aprés	$d_0'' = 1cm$ $d_x'' = 1cm$	$V_0'' = 10$ $V_x'' = 10$	$P_0'' = 20m_x$ $P_x'' = 10m_x$

Echelle : 1 cm $\longrightarrow$ 10 m_x (kgm/s)

2-c- Conservation de la quantité de mouvement



Conclusion :

La quantité de mouvement totale d'un système isolé est constante

$$\vec{P}_T = \vec{P}_T\,' = \vec{P}_T\,''$$

2-c- Conservation de la quantité de mouvement

Ce principe de conservation de la quantité de mouvement est très important en physique. On peut également l'écrire sous la forme:

$$\vec{P}_T = \vec{P}_T\,' = \vec{P}_T\,'' \Rightarrow \vec{P}_o + \vec{P}_x = \vec{P}_o\,' + \vec{P}_x\,'$$

En mettant les grandeurs de chaque disque d'un même côté on a:

$$\vec{P}_o - \vec{P}_o\,' = \vec{P}_x\,' - \vec{P}_x \Rightarrow \quad \Delta\vec{P}_x = -\Delta\vec{P}_o$$

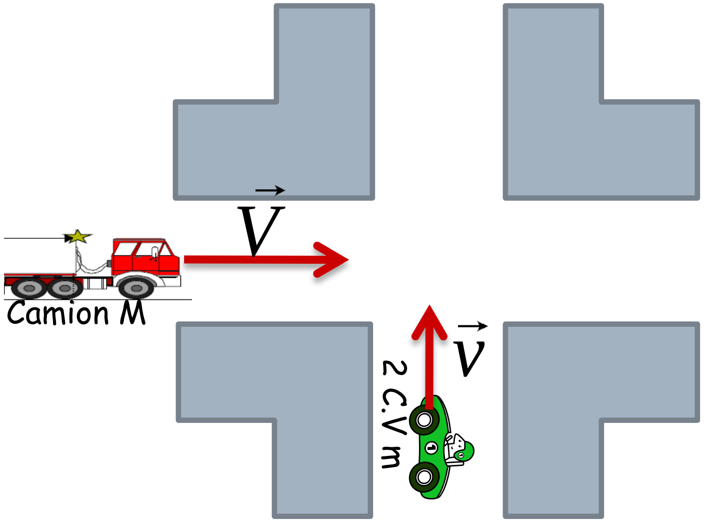
Avec : $\Delta\vec{P}_o = \vec{P}_o\,' - \vec{P}_o$ Et : $\Delta\vec{P}_x = \vec{P}_x\,' - \vec{P}_x$

Donc une interaction produit un échange de quantité de mouvement entre particules

Exercice d'application:

Un camion et une 2 CV arrivent sur un croisement.
Ils rentrent en collision et se déplacent dans une direction de 45° en restant collées l'une à l'autre comme sur la figure.

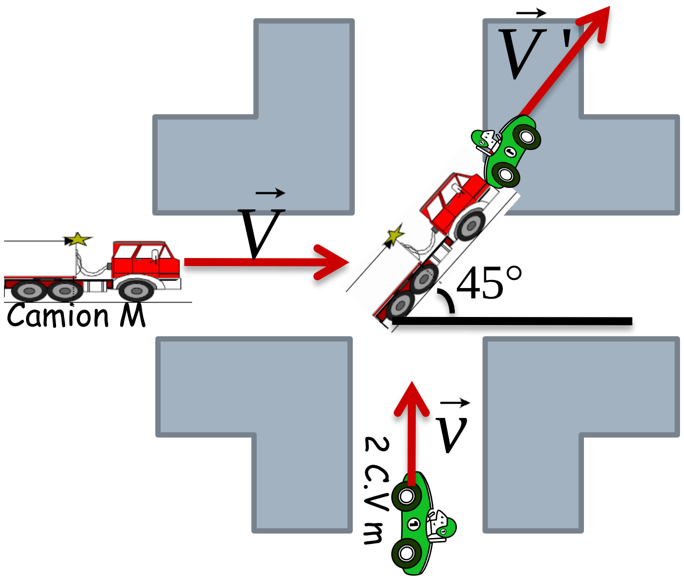
Un témoin affirme que le camion roulait à 80 km/h.
Dit – il la vérité?



Corrigé de l'exercice :

Le système est isolé donc il y conservation de la quantité de mouvement totale

Avant la collision : $\vec{P}_T = \vec{P}_c + \vec{P}_v = M\vec{V} + m\vec{v}$



Après la collision : $\vec{P}_T' = \vec{P}_c' + \vec{P}_v' = (M+m)\vec{V}'$

Conservation : $\vec{P}_T = \vec{P}_T' \Rightarrow M\vec{V} + m\vec{v} = (M+m)\vec{V}'$

On décompose sur ox et oy

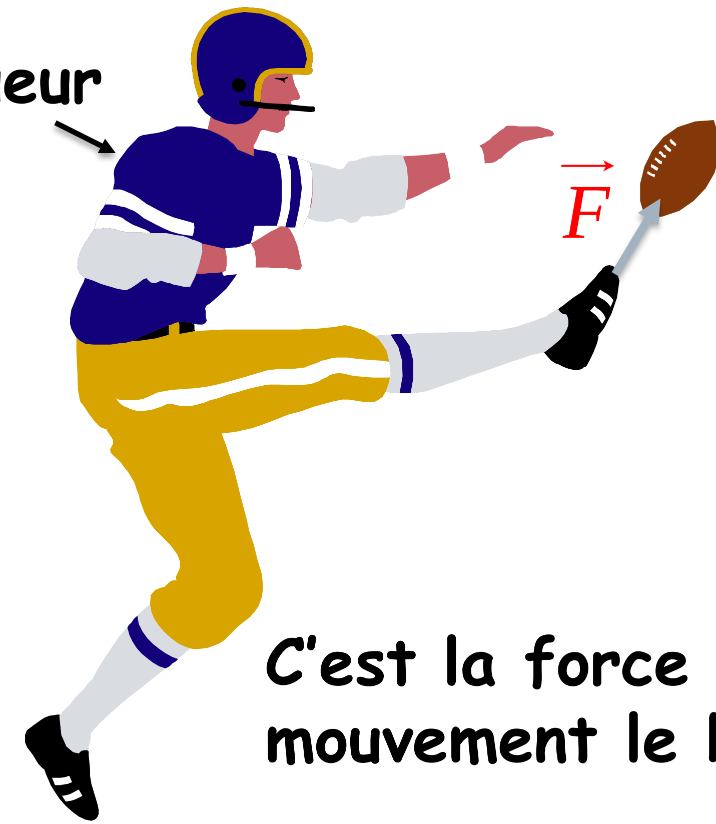
$$\begin{cases} ox: \quad MV = (M+m)V'\cos\alpha --- (1) \\ oy: \quad mv = (M+m)V'\sin\alpha --- (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2)/(1) \Rightarrow \frac{mv}{MV} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg45° = 1 \quad \Leftrightarrow v = \frac{M}{m}V = 320\ km/h$$

impossible

Le témoin a donc menti

3- Notion de Force



Le tir du joueur sur le ballon provoque sa mise en mouvement.

C'est la force qui permet de mettre en mouvement le ballon.

III- Les lois de Newton:

III-1- Enoncés des lois de Newton:

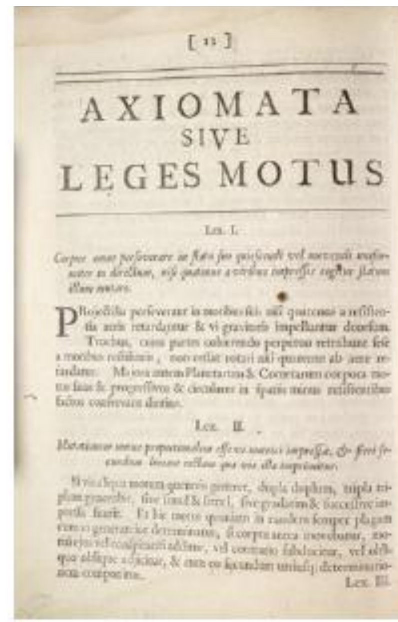
Isaac Newton
(1643–1727)

Les lois de la dynamique de Newton

Philosophiae Principia Mathematica (1687)

1ère loi (axiome) de la mécanique de Newton:

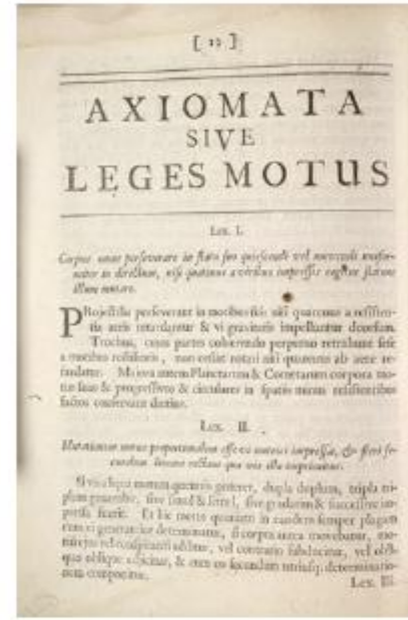
« Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état. »



AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Tout corps qui n'est soumis à aucune force est:
-Soit au repos
-Soit en mouvement suivant une droite avec une vitesse constante

III- Les lois de Newton:



AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Lex. II.

Lex. III.

- **2ème loi (loi fondamentale de la dynamique)**
  - « Les changements dans le mouvement d'un corps sont proportionnels à la force et se font dans la direction de la force. »

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}}$$

Si un corps de masse m se déplace avec une vitesse $\vec{v}$, il est soumis à une force :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

III- Les lois de Newton:


AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Lex. II.

Lex. III.

- **3ème loi (action-réaction)**
  - « À chaque action, il y a toujours une réaction égale et opposée; si un corps exerce une force sur un autre, cet autre corps exerce une force égale et opposée sur le premier »

Nous avons vu que deux particules en interaction constituent un système isolé tel que :

$$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$$

Pendant un intervalle de temps Δt :

$$\frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Cette loi est connue soit la loi de l'action et la réaction

III- Les lois de Newton:

III-2-Toutes ces lois sont valables dans tout repère Galiléen

Soient deux repères Galiléens R_1 et R_2 et soit un mobile se déplaçant avec:

Une vitesse v_1 dans R_1 et v_2 dans R_2 à un instant t

Une vitesse v'1 dans R_1 et v'_2 dans R2 à un instant t'

Et soit v la vitesse de R_2 par rapport à R_1

En appliquant la loi de composition des vitesses on a :

A l'instant t : $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}$

A l'instant t' : $\vec{v}\,'_1 = \vec{v}\,'_2 + \vec{v}$

III-2-Toutes ces lois sont valables dans tout repère Galiléen

La variation de quantité de mouvement dans R1 est : $\Delta\vec{P} = m(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1)$

La variation de quantité de mouvement dans R2 est : $\Delta\vec{P}' = m(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2)$

Donc on a:

$$\Delta\vec{P} = m(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) = m\left[(\vec{v}'_2 + \vec{v}) - (\vec{v}_2 + \vec{v})\right] = m\left[\vec{v}'_2 - \vec{v}_2\right] = \Delta\vec{P}'$$

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{P}'$$

Remarque:
Dans le cas général un corps est soumis à plusieurs forces, la 2ème loi de Newton s' écrit:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_t = m\vec{a}$$

Plus connue comme la relation fondamentale de la dynamique : (R.F.D)

III-3- Applications des lois de Newton:

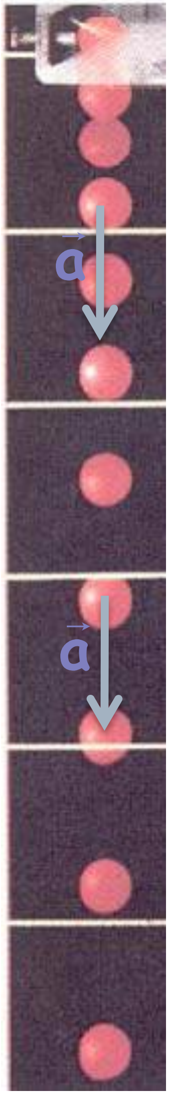
III-3-a-Poids au voisinage de la terre:

Le poids est la force exercée par la terre sur le corps, il s' écrit donc :

$$\vec{P} = m\vec{a} \quad \text{(2}^{\text{ème}}\text{ loi de Newton)}$$

On réalise pour cela deux expériences:

III-3- Applications des lois de Newton:



III-3-a-Poids au voisinage de la terre:

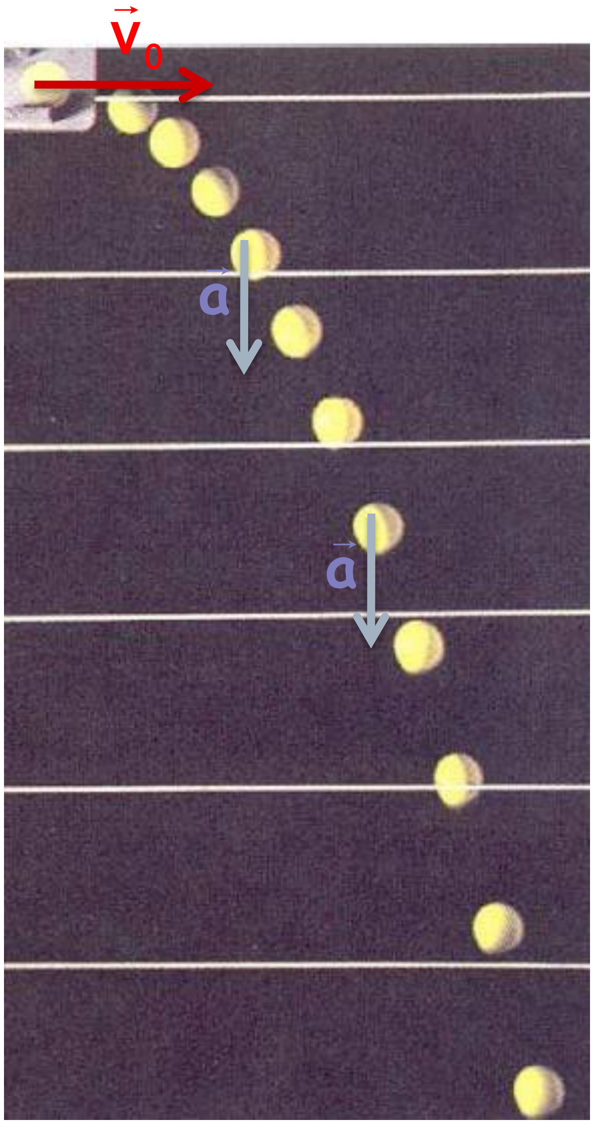
1ère expérience : Chute libre sans vitesse initiale

Après une étude cinématique des mouvements on constate que l'accélération est constante dans les deux cas en sens et direction.

Cette accélération est connue sous le nom d'accélération de la pesanteur notée g.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

III-3- Applications des lois de Newton:



III-3-a-Poids au voisinage de la terre:

2ème expérience :
Chute avec vitesse initiale horizontale

Après une étude cinématique des mouvements on constate que l'accélération est constante dans les deux cas en sens et direction.

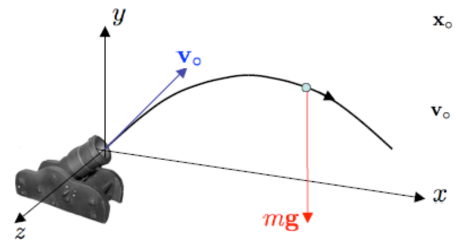
Cette accélération est connue sous le nom d'accélération de la pesanteur notée g.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

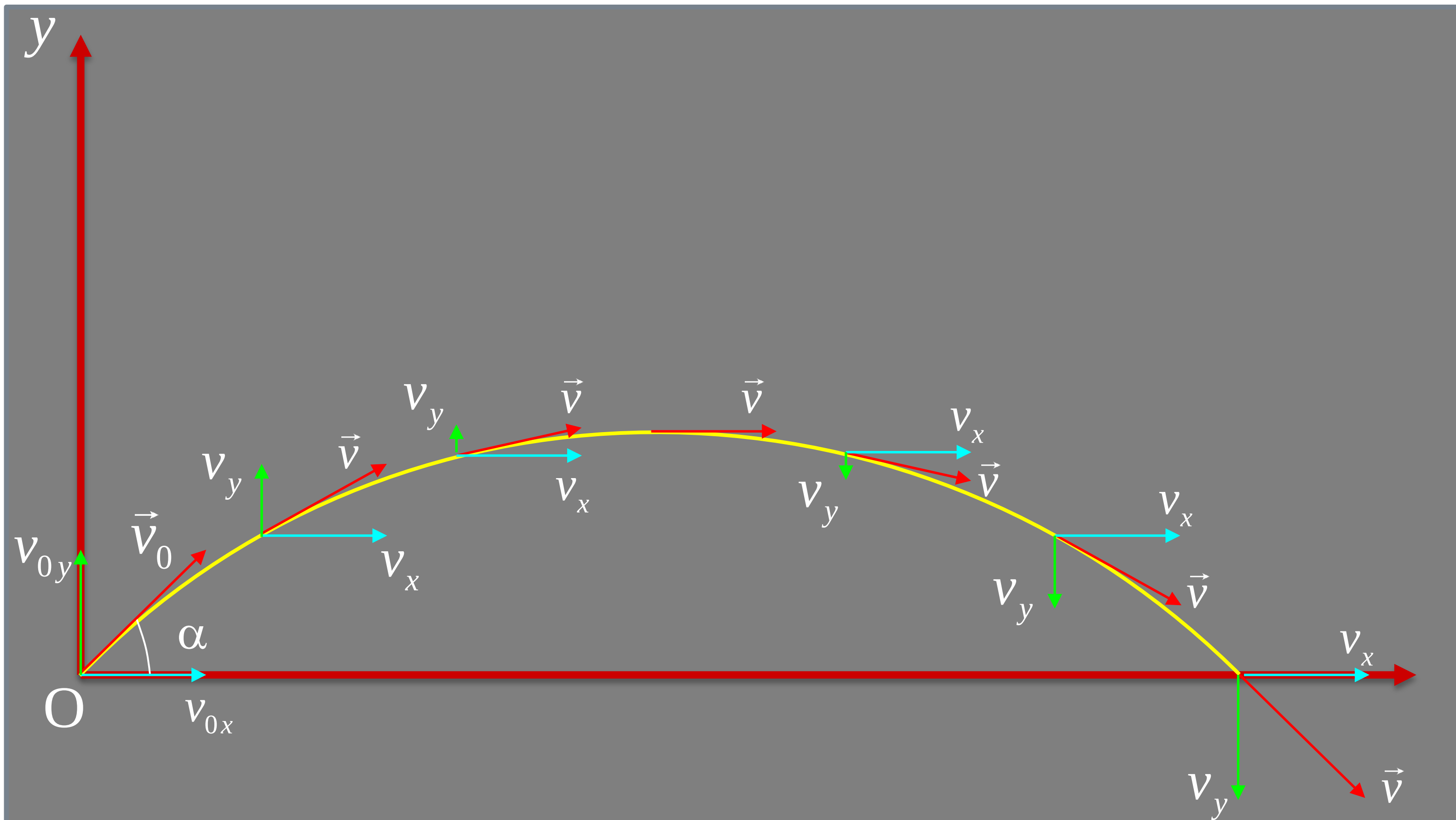
Exemple :
A Alger g = 9.80 m/s2

Au pôle nord g = 9.83 m/s2

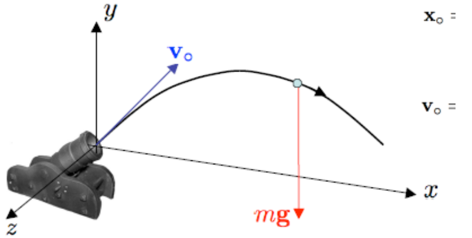
III-3- Applications des lois de Newton:



III-3-b- Mouvement d'un projectile au voisinage de la terre:



III-3- Applications des lois de Newton:



III-3-b- Mouvement d'un projectile au voisinage de la terre:

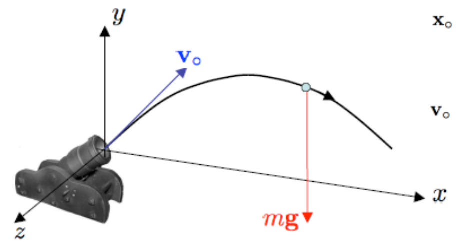
Suivant ox: Mouvement horizontal: MRU

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ x(t) = v_0 \cos\alpha \, t \end{cases}$$

Suivant oy: Mouvement vertical: MRUV

$$\begin{cases} a_y = -g \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \, t \end{cases}$$

III-3- Applications des lois de Newton:



III-3-b- Mouvement d'un projectile au voisinage de la terre:

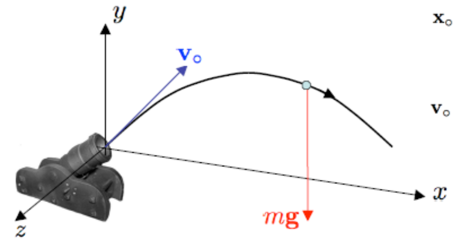
Équation de la trajectoire

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

On élimine le temps des deux équations pour avoir y en fonction de x

$$\boxed{y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha\, x}$$

III-3- Applications des lois de Newton:



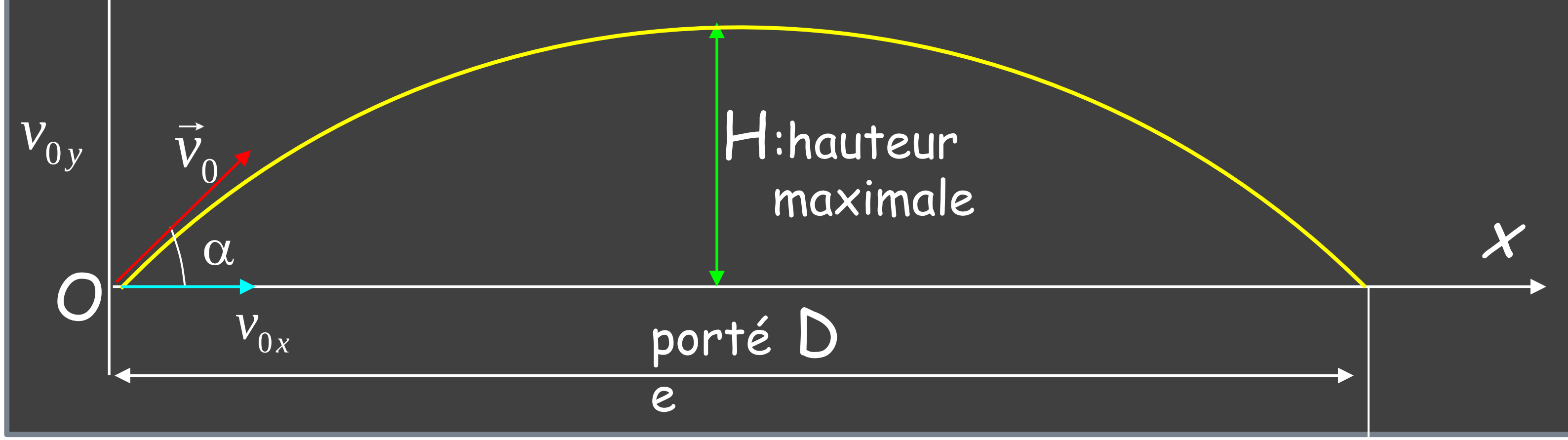
III-3-b- Mouvement d'un projectile au voisinage de la terre:

La hauteur maximale correspond à $v_y = 0$ et on obtient:

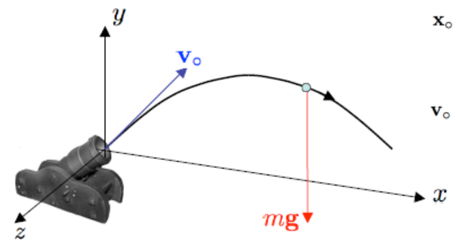
La hauteur maximale: $$H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$$

En posant y = 0, dans l'équation de la trajectoire, on a

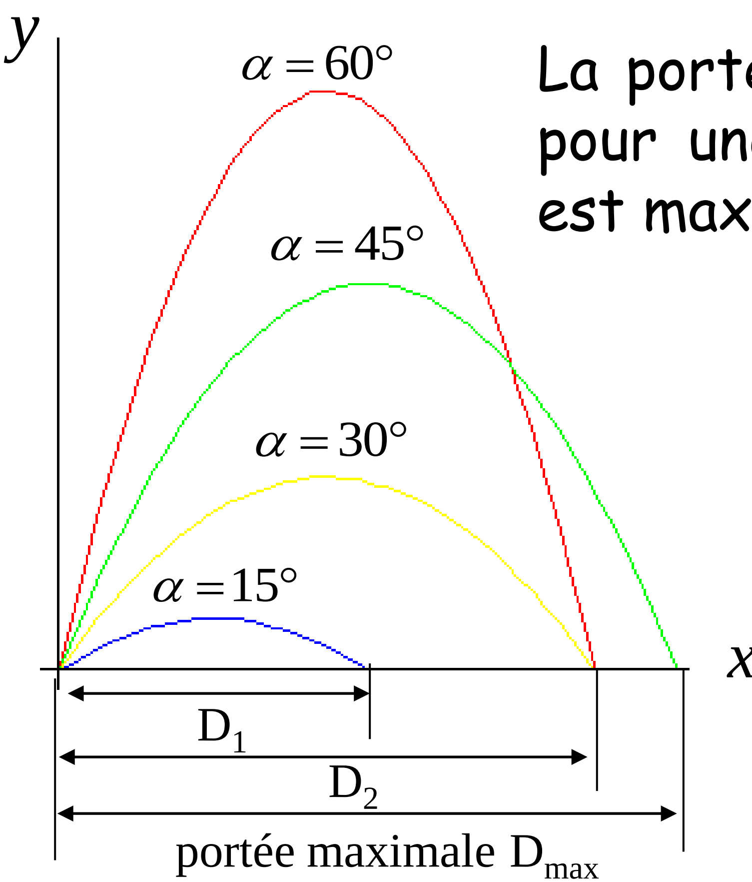
La portée: $$D = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$



III-3- Applications des lois de Newton:



III-3-b- Mouvement d'un projectile au voisinage de la terre:



La portée D varie avec l'angle de tir α pour une même vitesse initiale v_0. Elle est maximale pour α=45°:

$$D_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

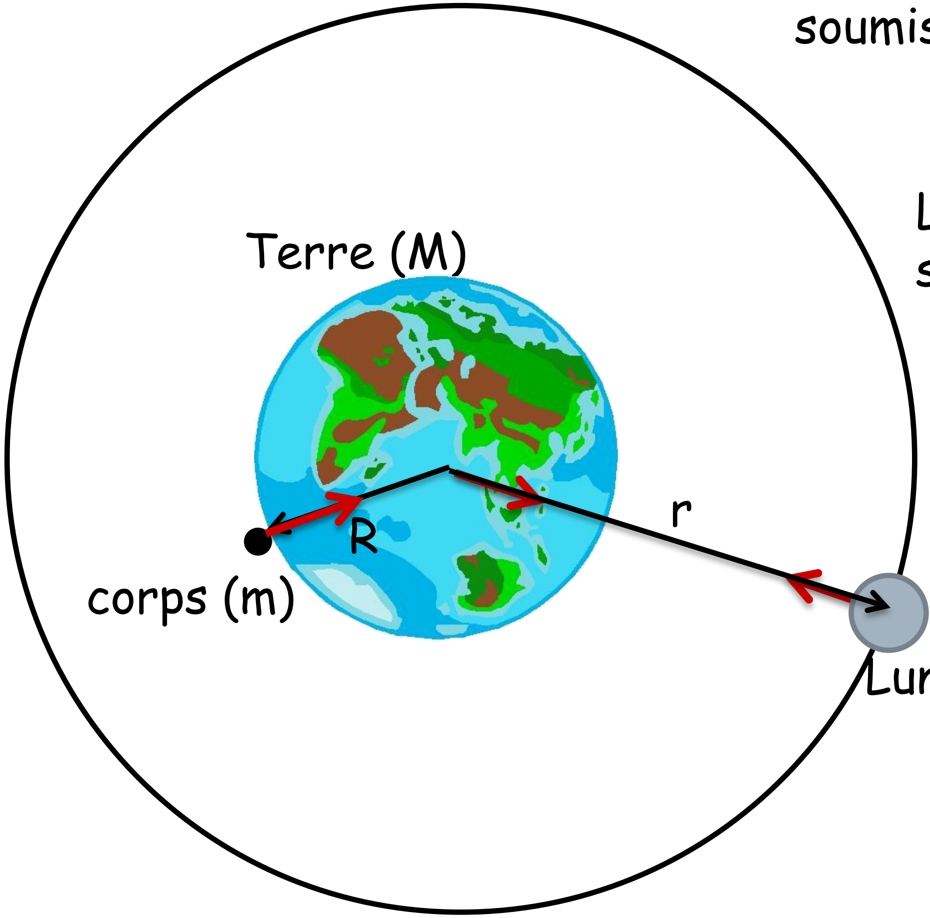
IV-Loi de gravitation universelle:

Un Corps en chute libre au voisinage du sol est soumis à la force :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Lune qui tourne autour de la terre est soumise à la force :

$$\vec{F} = m_l\vec{a}$$



Sachant que R = 6400 km et r = 384 000 km donc :

$$\frac{r}{R} = 60$$

IV-Loi de gravitation universelle:

En faisant le rapport des modules des deux forces on a:

$$\frac{P}{F} = \frac{m}{m_l}\frac{g}{a}$$

Or pour la lune le mouvement circulaire uniforme donc:

$$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = r\frac{4\pi^2}{T^2}$$

Sachant que $g = 10\, m/s^2$ et que la période de rotation de la lune autour de la terre est $T = 24\, heures$ on obtient :

$$\frac{g}{a} = 3600 = (60)^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

IV-Loi de gravitation universelle:

Donc on obtient :

$$\frac{P}{F} = \frac{m}{m_l}\frac{g}{a} = \frac{m}{m_l}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Les forces sont donc proportionnelles à la masse et inversement proportionnelles au carré du rayon :

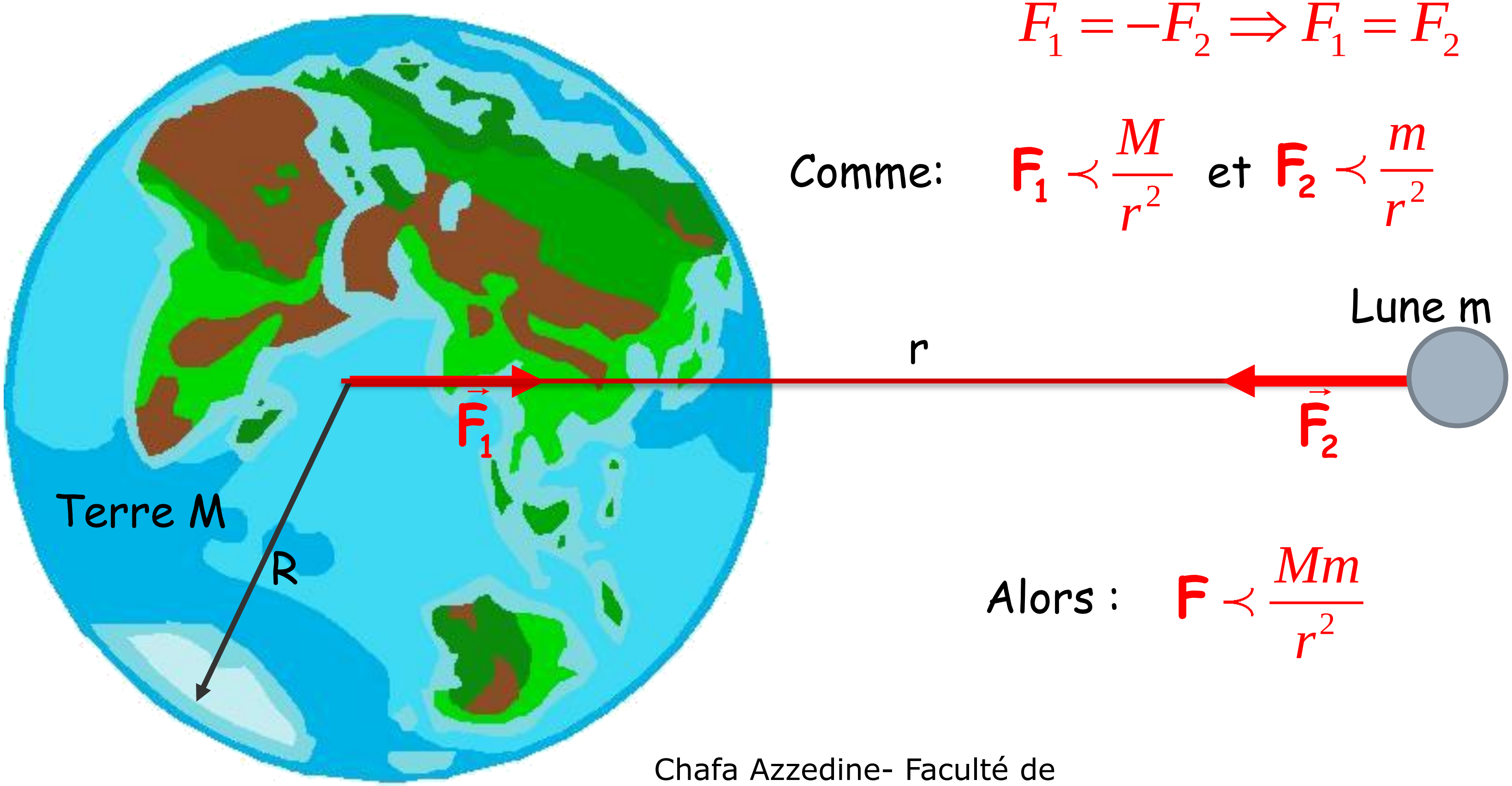
$$F \prec \frac{m}{r^2}$$

IV-Loi de gravitation universelle:

D'après la loi de l'action et la réaction (3ème loi de Newton):

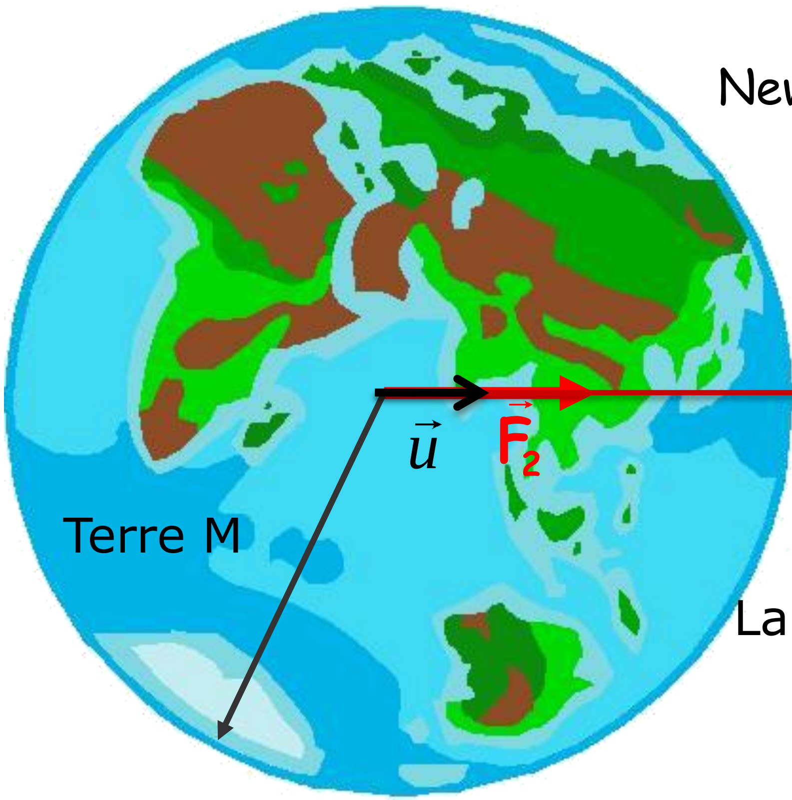
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow F_1 = F_2$$

Comme: $F_1 \prec \dfrac{M}{r^2}$ et $F_2 \prec \dfrac{m}{r^2}$



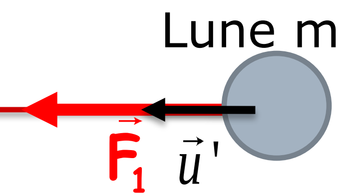
Alors : $F \prec \dfrac{Mm}{r^2}$

IV-Loi de gravitation universelle:



Newton a introduit une constante de gravitation

$$G = 6.67\,10^{-11}\ N.kg^{-2}.m^{2}$$



La force appliquée par la terre sur la lune est :

$$\vec{F}_1 = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}$$

La force appliquée par la lune sur la terre est :

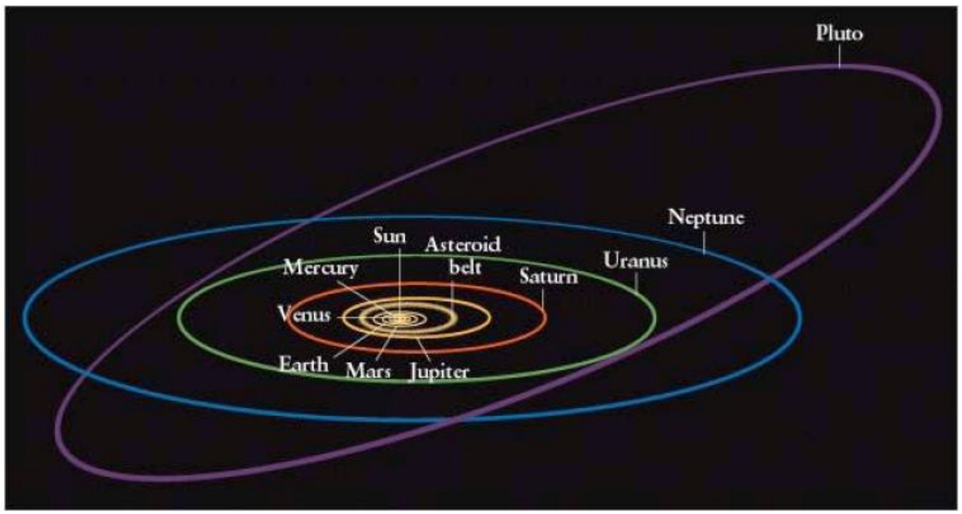
$$\vec{F}_2 = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}\,'$$

IV-Loi de gravitation universelle:

Johannes Kepler (1571-1630)

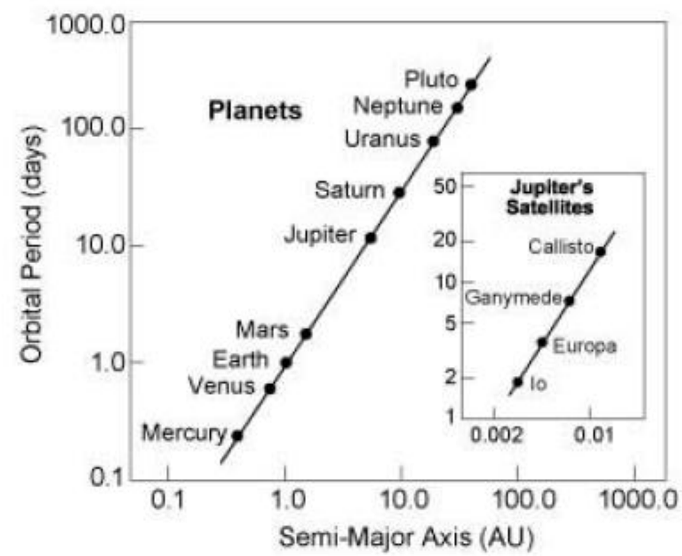
- 3ème loi de Kepler (loi des périodes):

Si l'orbite est circulaire autour du soleil, chaque planète subit la force



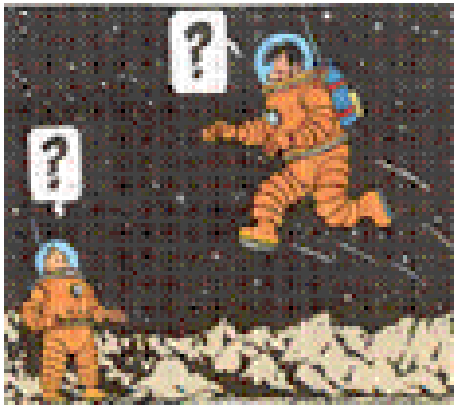
$$F = G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

On faisant le rapport des forces appliquées à chaque planète on a:

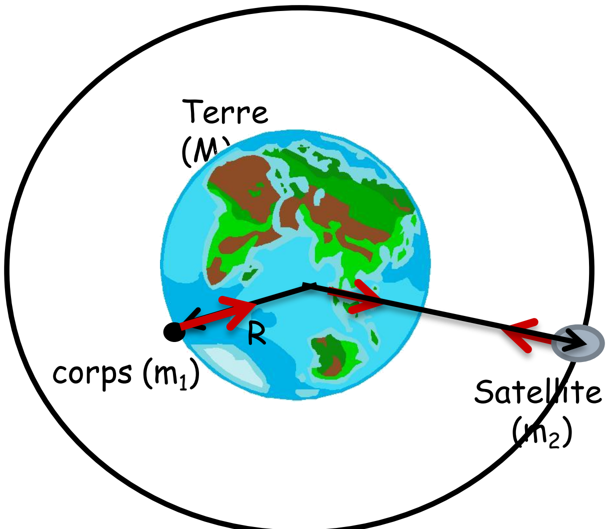


$$\frac{F_1}{F_2} \Rightarrow \frac{G\dfrac{Mm_1}{r_1^{\,2}}}{G\dfrac{Mm_2}{r_2^{\,2}}} = \frac{m_1 r_1 \dfrac{4\pi^2}{T_1^{\,2}}}{m_2 r_2 \dfrac{4\pi^2}{T_2^{\,2}}} \Leftrightarrow \frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \frac{r_1^{\,3}}{r_2^{\,3}}$$

IV-Loi de gravitation universelle:



- Satellite géostationnaire :



Corps au niveau du sol:

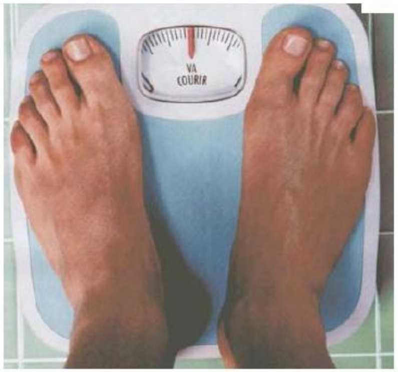
$$F_1 = G\frac{Mm_1}{R^2} = m_1 g_0$$

Satellite à une hauteur h du niveau du sol:

$$F_2 = G\frac{Mm_2}{r^2} = m_2 g$$

En faisant le rapport des deux forces :

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{G\frac{Mm_2}{r^2}}{G\frac{Mm_1}{R^2}} = \frac{m_2 g}{m_1 g_0} \Leftrightarrow g(h) = \frac{R^2}{r^2} g_0 = \frac{R^2}{(R+h)^2} g_0$$



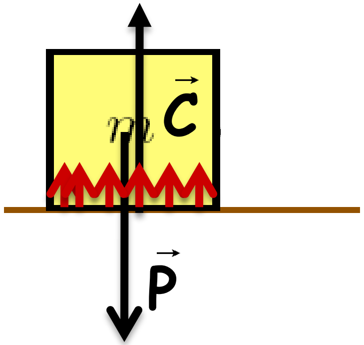
- Exemple : $m = 68\,\mathrm{kg} \rightarrow P \approx 680\mathrm{N}$ sur Terre

  $\rightarrow P \approx 115\,\mathrm{N}$ sur la Lune

V- Les Forces de contact

C'est la force exercée entre deux corps qui sont en contact l'un avec l'autre. Nous allons étudier ces forces à travers certains exemples.

Exemple 1: un objet de masse m au repos sur un plan horizontal

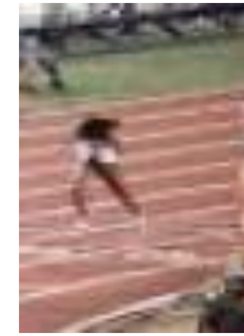


A l'équilibre :

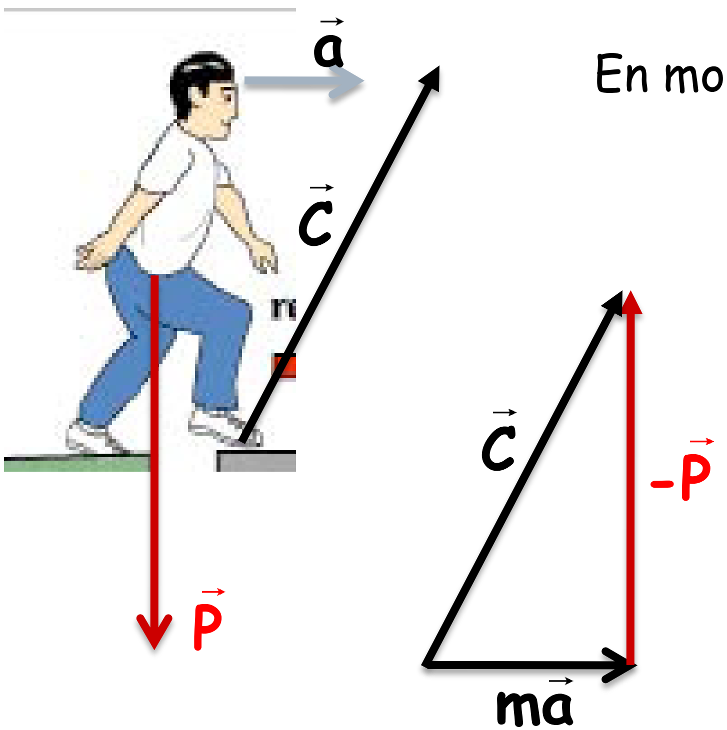
$$\vec{P} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = -\vec{P}$$

$\vec{C}$: Représente la somme de toutes les petites forces de contact entre le corps et le sol (réaction du sol)

V- Les Forces de contact



Exemple 2: Démarrage d'une course sur un plan horizontal



En mouvement on écrit :

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{C} = m\vec{a} - \vec{P}$$

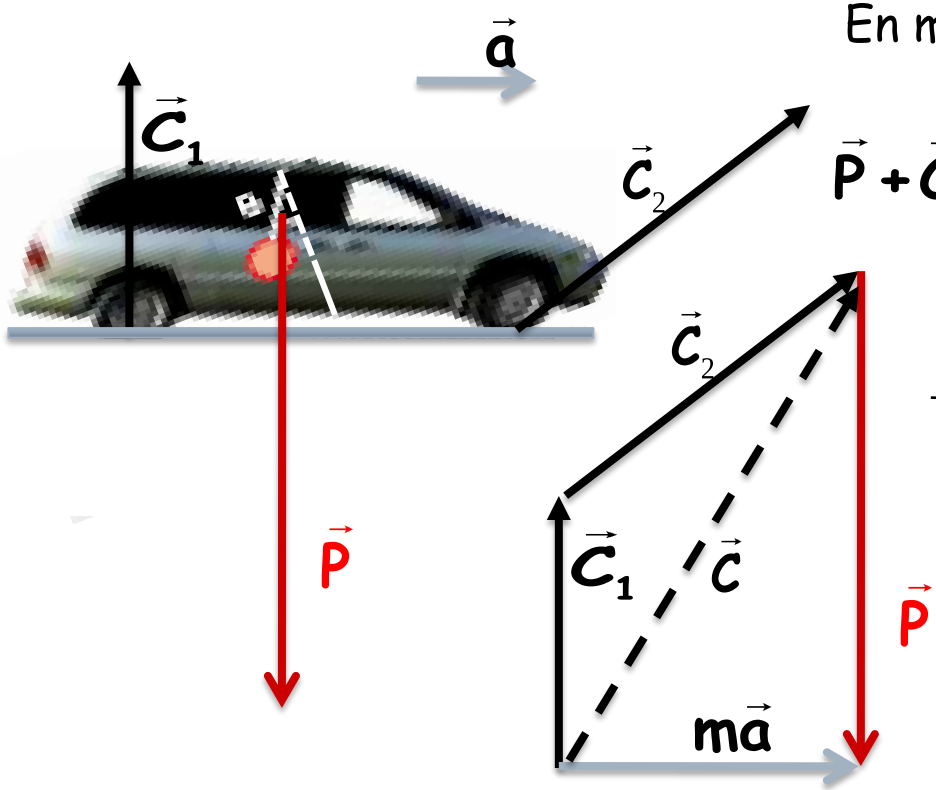
Module de C:

$$C = \sqrt{(ma)^2 + P^2}$$

Remarque: P est constant C dépend de ma

V- Les Forces de contact

Exemple 3: Démarrage d'une voiture ou moto sur un plan horizontal



En mouvement on écrit :

$$\vec{P}+\vec{C}_1+\vec{C}_2=m\vec{a} \Rightarrow \vec{C}=\vec{C}_1+\vec{C}_2=m\vec{a}-\vec{P}$$

$\vec{C}$ (ou $\vec{C_2}$) est appelée force motrice

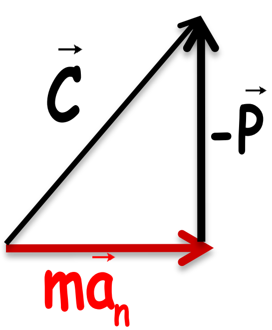
V- Les Forces de contact

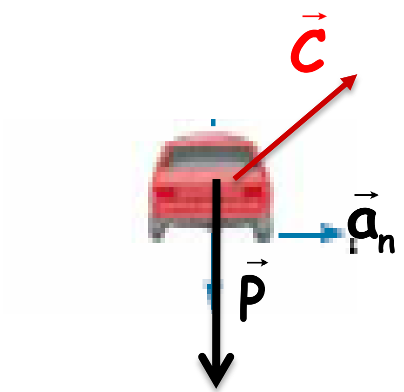
Exemple 4: Voiture dans un virage avec une vitesse constante:

Relation fondamentale de la dynamique

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{C} = m\vec{a} - \vec{P}$$

$$\vec{v} = cte \Rightarrow \begin{cases} a_T = 0 \\ a_N = v^2 / R \end{cases}$$





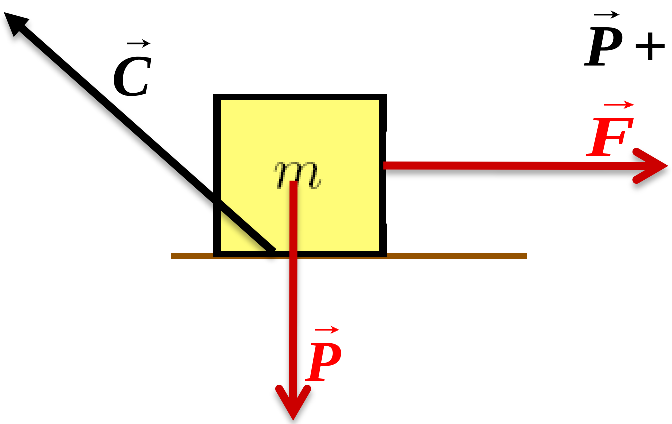
VI- Forces de frottements:

On étudie ces forces à travers certains exemples:

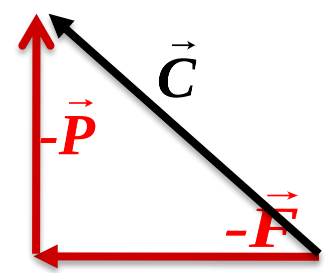
Exemple 1: corps de masse m sur un plan horizontal au repos:

On tire un corps de masse m, au repos, avec une force $\vec{F}$ sans le déplacer

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit:



$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = -\vec{F} - \vec{P}$$

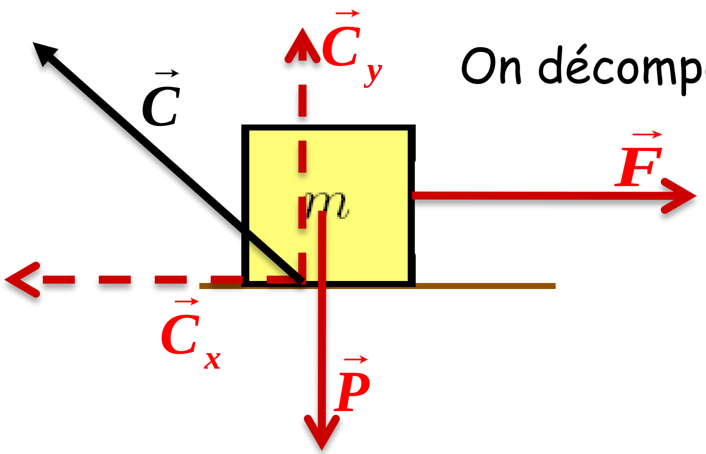


VI- Forces de frottements:

Exemple 1: corps de masse m sur un plan horizontal au repos:

On définit le coefficient de frottement statique par:

$$\mu_s = \left|\frac{C_x}{C_y}\right|$$



On décompose donc, la force de contact sur ox et oy:

$$\Rightarrow \begin{cases} ox : F - C_x = 0 \\ oy : C_y - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_x = F \\ C_y = P \end{cases} \quad \boxed{\Rightarrow \mu_s = \frac{F}{P}}$$

Donc il faut une force $F \rangle F_0 = \mu_s P$ pour qu'il y ait mouvement.

VI- Forces de frottements:

Exemple 1: corps de masse m sur un plan horizontal au repos:

Exemples de coefficient de frottement statique

Matériaux	
Acier/Acier (surface sèche)	0,6
Acier/Acier (surface graisseuse)	0,1
Pneu de caoutchouc (route sèche)	0,9

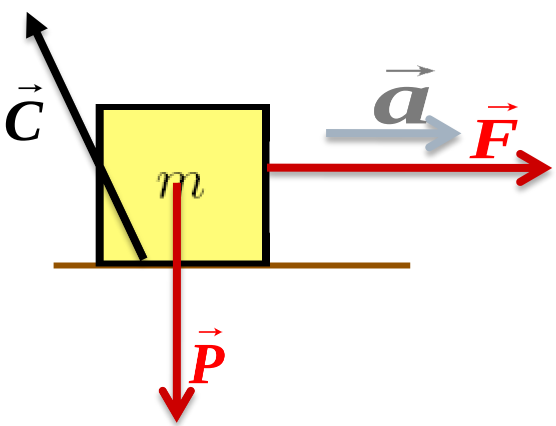
VI- Forces de frottements:

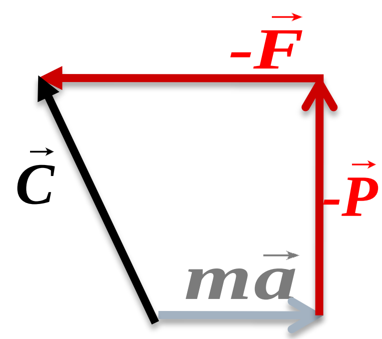
Exemple 2: corps de masse m sur un plan horizontal en mouvement :

Soit un corps en mouvement sur lequel on applique une force $\vec{F}$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit:

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{C} = m\vec{a} - \vec{P} - \vec{F}$$

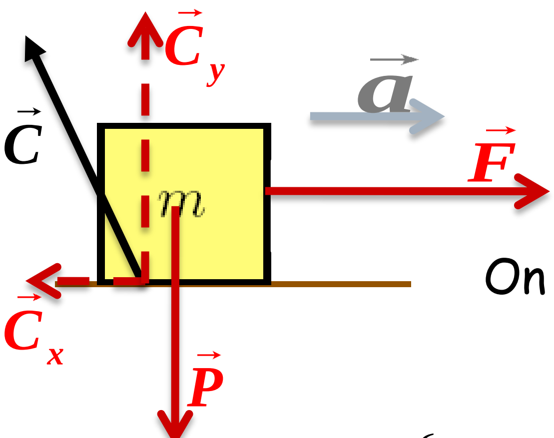




VI- Forces de frottements:

Exemple 2: corps de masse m sur un plan horizontal en mouvement :

On définit le coefficient de frottement dynamique (ou de glissements) par:



$$\mu_d = \left|\frac{C_x}{C_y}\right|$$

On décompose donc la force de contact sur ox et oy

$$\Rightarrow \begin{cases} ox: F - C_x = ma \\ oy: C_y - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_x = F - ma \\ C_y = P \end{cases} \quad \boxed{\Rightarrow \mu_g = \frac{F - ma}{P}}$$

VI- Forces de frottements:

Exemple 2: corps de masse m sur un plan horizontal en mouvement :

Exemples de coefficient de frottement dynamique

Matériaux	
Acier/Acier (surface sèche)	0,4
Acier/Acier (surface graisseuse)	0,05
Pneu de caoutchouc (route sèche)	0,8

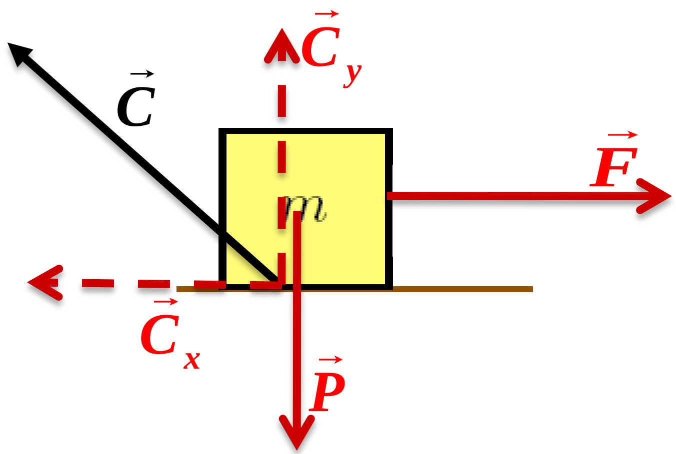
VI- Forces de frottements:

Exemple 2: corps de masse m sur un plan horizontal en mouvement :

Si le mouvement est uniforme , la vitesse est constante donc $\vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = -\vec{P} - \vec{F}$$

$$\boxed{\Rightarrow \mu_g = \left|\frac{C_x}{C_y}\right| = \frac{F}{P}}$$

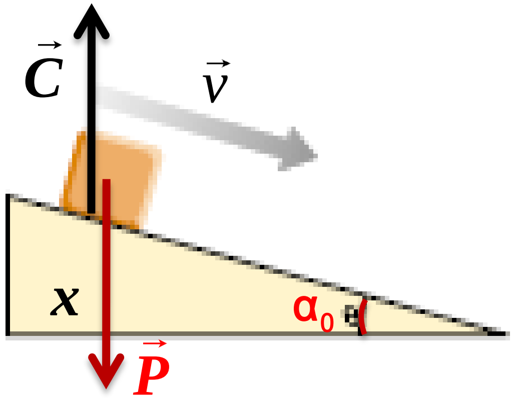


VI- Forces de frottements:

Exemple 3: corps de masse m sur un plan incliné au repos:

On lève le plan incliné sans que le corps ne bouge jusqu'à un angle limite α_0

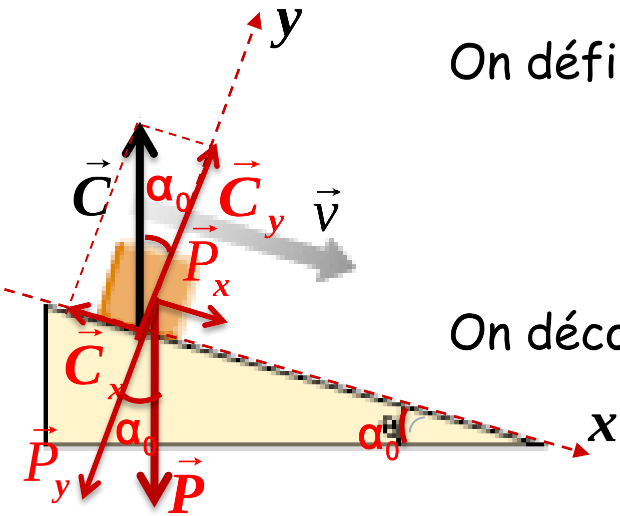
La relation fondamentale de la dynamique:



$$\vec{P}+\vec{C}=\vec{0}\Rightarrow\vec{C}=-\vec{P}$$

VI- Forces de frottements:

Exemple 3: corps de masse m sur un plan incliné au repos:



On définit le coefficient de frottement statique par:

$$\mu_s = \left| \frac{C_x}{C_y} \right|$$

On décompose les forces sur ox et oy:

$$\Rightarrow \begin{cases} ox : P_x - C_x = 0 \\ oy : C_y - P_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} P_x = C_x \\ C_y = P_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_s = \frac{P_x}{P_y} = \frac{mg \sin \alpha_0}{mg \cos \alpha_0} \qquad \boxed{\Rightarrow \mu_s = tg\alpha_0}$$

VI- Forces de frottements:

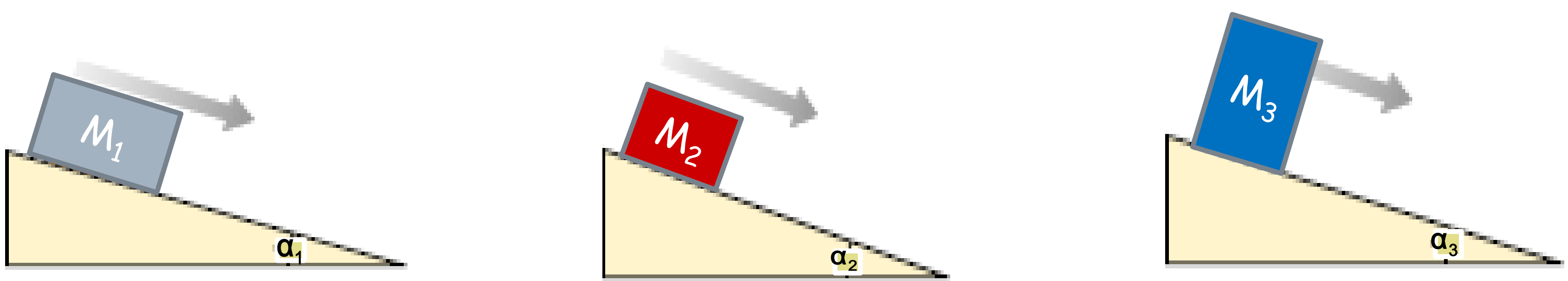
Exemple 3: corps de masse m sur un plan incliné au repos:

Remarques:

-On refait l'expérience avec le même corps ayant des masses différentes :

on constate que μ_s ne dépend pas de la masse

-On refait l'expérience avec des corps de nature différentes :



on constate que μ_s dépend de la nature des corps en contact.

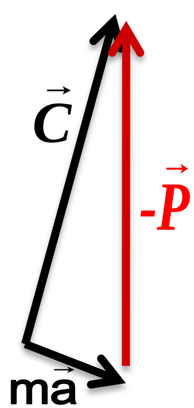
VI- Forces de frottements:

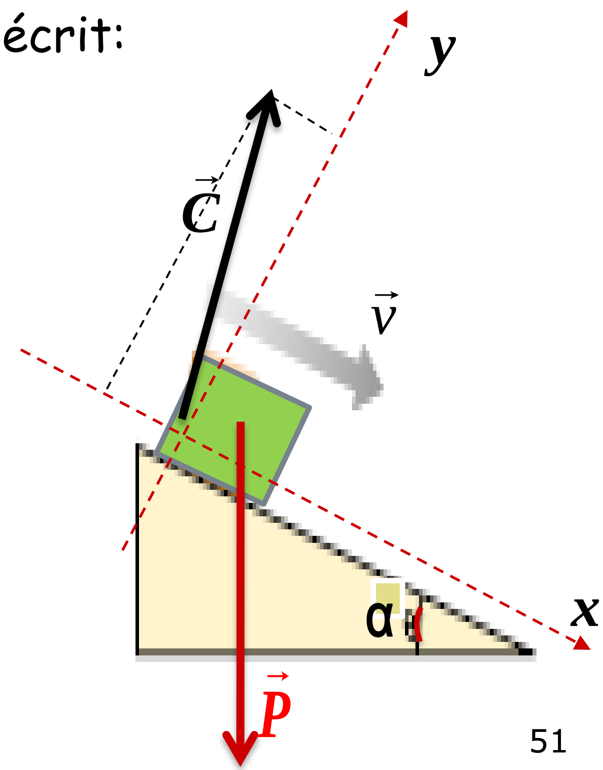
Exemple 4: corps de masse m sur un plan incliné en mouvement:

Si on prend un angle α supérieur à α_0 il y mouvement

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit:

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{C} = m\vec{a} - \vec{P}$$





VI- Forces de frottements:

Exemple 4: corps de masse m sur un plan incliné en mouvement:

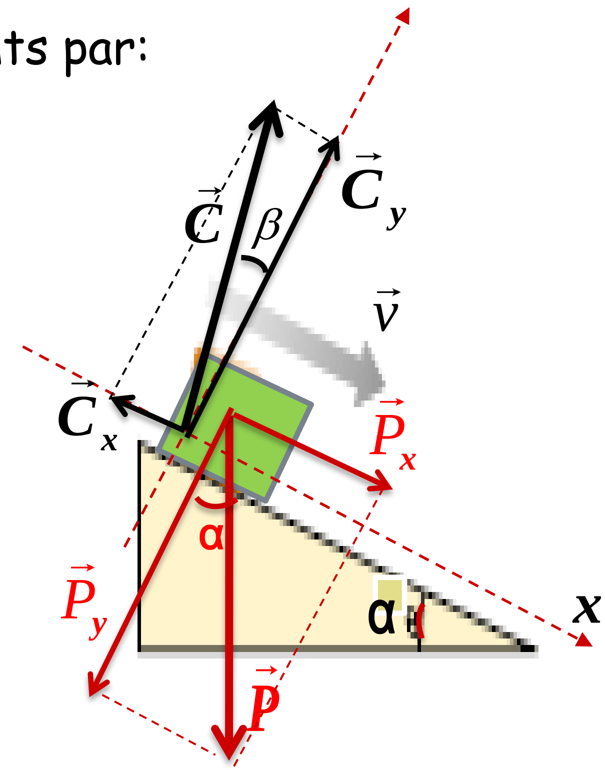
On définit le coefficient de frottement de glissements par:

$$\mu_d = \left|\frac{C_x}{C_y}\right|$$

On décompose les forces sur ox et oy:

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{ox : P_x - C_x} = ma \\ \boldsymbol{oy : C_y - P_y = 0} \end{cases}$$

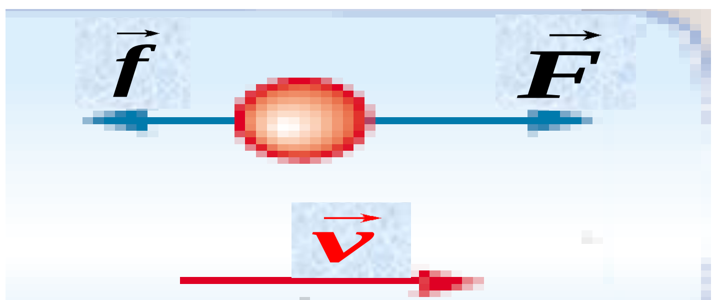
$$\Rightarrow \mu_g = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}$$

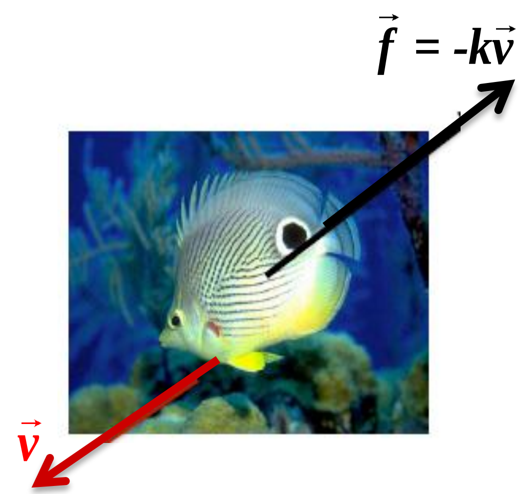


VI- Forces de frottements:

Exemple 5: corps de masse m dans un fluide

Quand un corps se déplace dans un fluide avec de petites vitesses, il est soumis à une force de frottement proportionnelle à la vitesse $\vec{f} = -k\vec{v}$





La relation fondamentale de la dynamique donne:

$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

VI- Forces de frottements:

Exemple 5: corps de masse m dans un fluide

La relation fondamentale de la dynamique donne:

$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

En projetant dans le sens du mouvement on a :

$$F - f = ma$$

Sachant que :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

On obtient :

$$F - kv = m\frac{dv}{dt}$$

VI- Forces de frottements:

Exemple 5: corps de masse m dans un fluide

Cette relation s'écrit sous la forme :

$$m\frac{dv}{dt}+kv=F$$

C'EST UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU 1ER ORDRE AVEC SECOND MEMBRE

Résolution de cette équation, la solution s'écrit comme:

$$v(t)=v_p(t)+v_{s.s.m}(t)$$

Avec $v_p(t)$ est la solution particulière telle que v est constante donc $\frac{dv}{dt}=0$

$$kv_p=F \Rightarrow v_p(t)=\frac{F}{k}$$

VI- Forces de frottements:

Exemple 5: corps de masse m dans un fluide

et $v_{S.S.m}(t)$ est la solution sans second membre qui correspond à $F = 0$

$$m\frac{dv}{dt} + kv = 0$$

En faisant une séparation des variables on a:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt$$

On intègre de chaque côté et on obtient:

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int dt$$

VI- Forces de frottements:

Rappel :

$$\exp(\ln x) = x$$

Exemple 5: corps de masse m dans un fluide

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int dt$$

Rappel :

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

Le résultat de l'intégrale donne

$$\ln v(t) = -\frac{k}{m}t + cte$$

On passe aux exponentiels donc:

$$v(t) = exp(-\frac{k}{m}t + Cte)$$

$$v_{ssm}(t) = Aexp(-\frac{k}{m}t)$$

VI- Forces de frottements:

Exemple 5: corps de masse m dans un fluide

$$\boldsymbol{v(t)} = \boldsymbol{v_p}(t) + v_{s.s.m}(t)$$

En remplaçant les solutions par leurs expressions on a:

$$v(t) = \frac{k}{m} + Ae^{-\frac{k}{m}t}$$

En prenant comme conditions aux limites t = 0 s , v(0) =0 m/s, la constante est:

$$\Rightarrow A = -\frac{k}{m}$$

La vitesse en fonction du temps s'écrit comme:

$$v(t) = \frac{k}{m} - \frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}$$

VI- Forces de frottements:

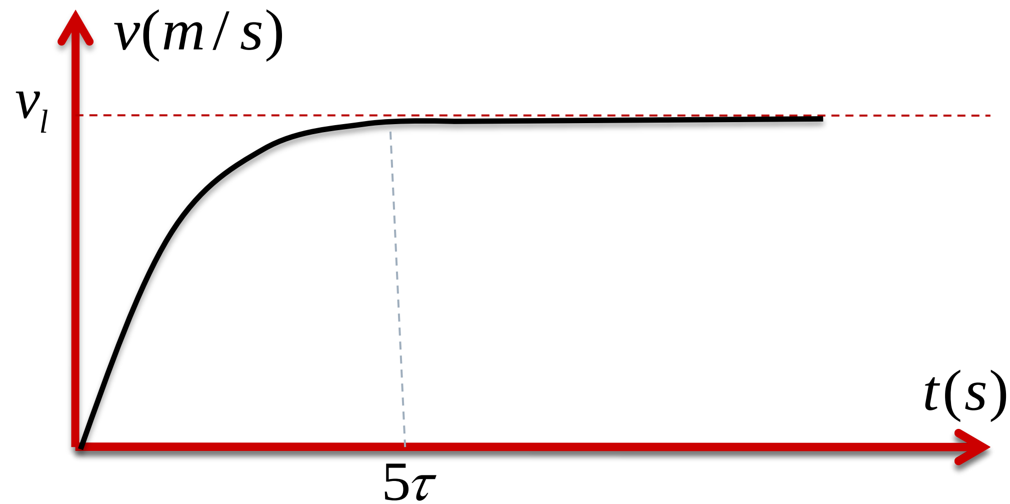
Exemple 5: corps de masse m dans un fluide

Finalement la vitesse s'écrit :

$$v(t) = \frac{k}{m} - \frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{k}{m}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$v(t) = v_l(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



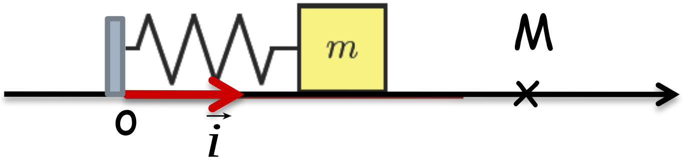
Avec:

$v_l = \frac{k}{m}$:vitesse limite

et $\tau = \frac{k}{m}$:constante de temps

VII- Forces élastiques:

1-Mouvement rectiligne sinusoïdal



Dans ce type de mouvement sinusoïdal l'abscisse x du point M s'écrit:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Amplitude

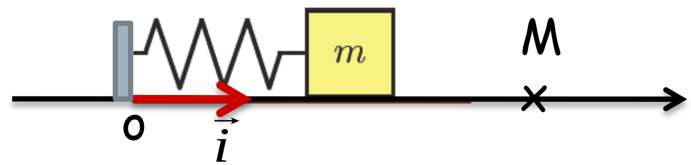
pulsation

Phase à l'origine

$$T = \frac{\omega}{2\pi} \quad est\ la\ \ période$$

VII- Forces élastiques:

1-Mouvement rectiligne sinusoïdal



Position de la masse m est :

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Vitesse est la dérivée de la position :

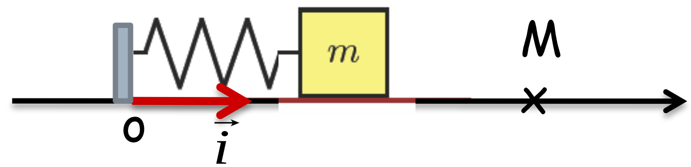
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

Accélération est la dérivée de la vitesse:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

VII- Forces élastiques:

1-Mouvement rectiligne sinusoïdal



On constate que l'équation de l'accélération devient:

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

x(t)

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Ou encore : $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

C'EST UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU 2ER ORDRE SANS SECOND MEMBRE

VII- Forces élastiques:

1- Mouvement rectiligne sinusoïdal

A- Interprétation dynamique:

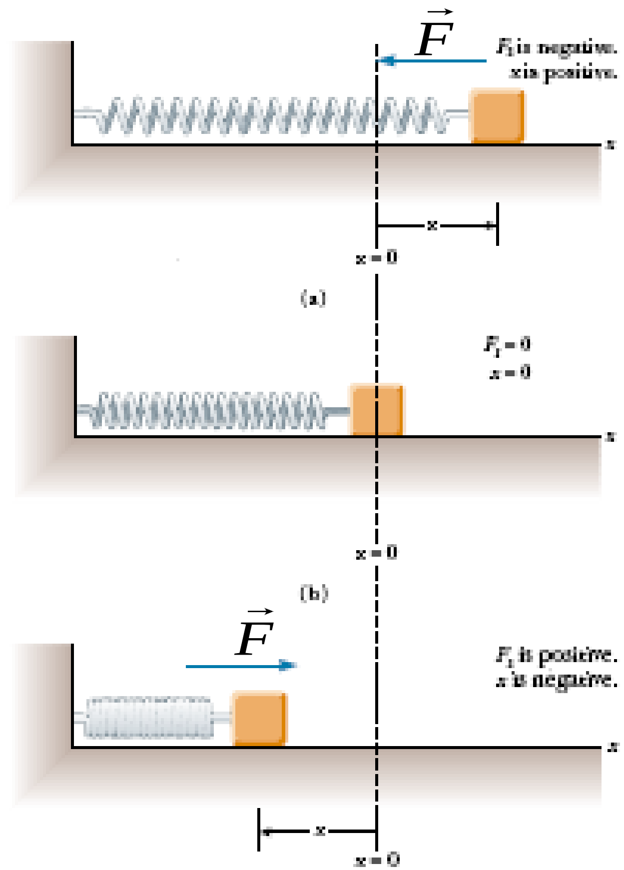
Si m est la masse du corps animé du mouvement rectiligne sinusoïdal il est soumis à une force:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 x\vec{i}$$

Cette force est opposée au déplacement x, elle tend à ramener le corps au point O:

On l'appelle force de rappel

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 x\vec{i} = -kx\vec{i}$$



VII- Forces élastiques:

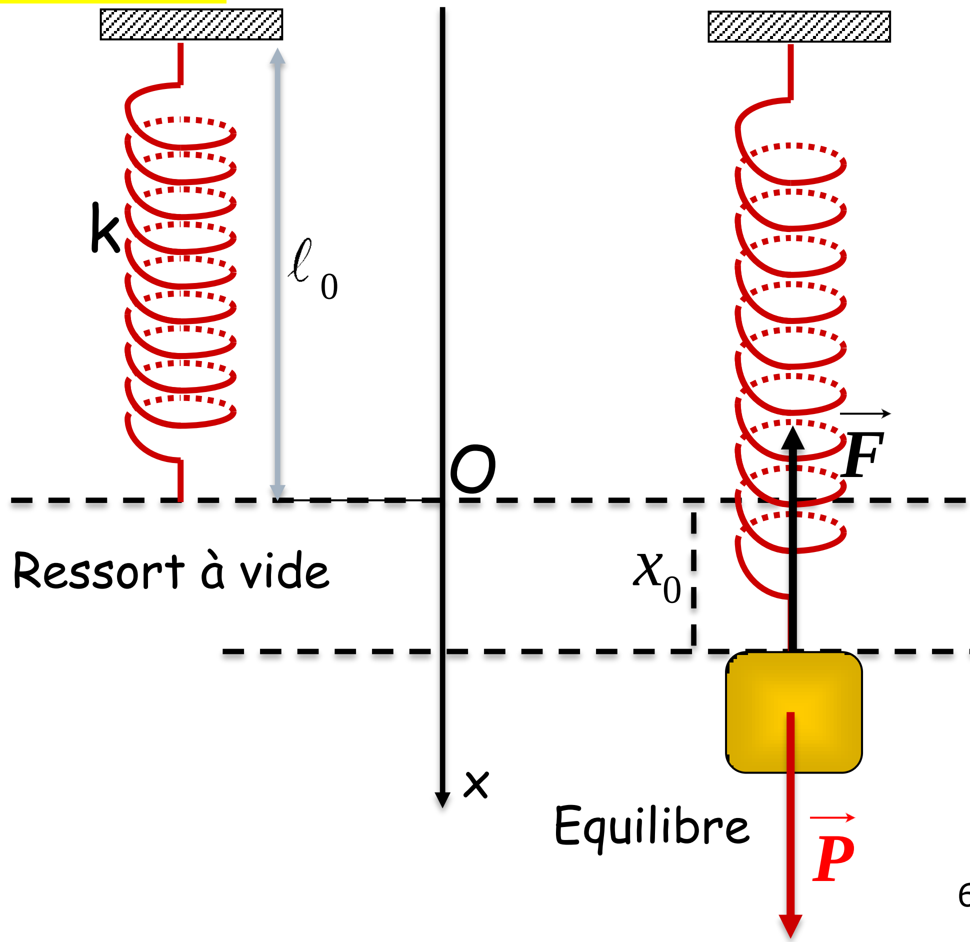
2- Mouvement d'un corps suspendu à un ressort

A l'équilibre on a :

$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow P = F$$

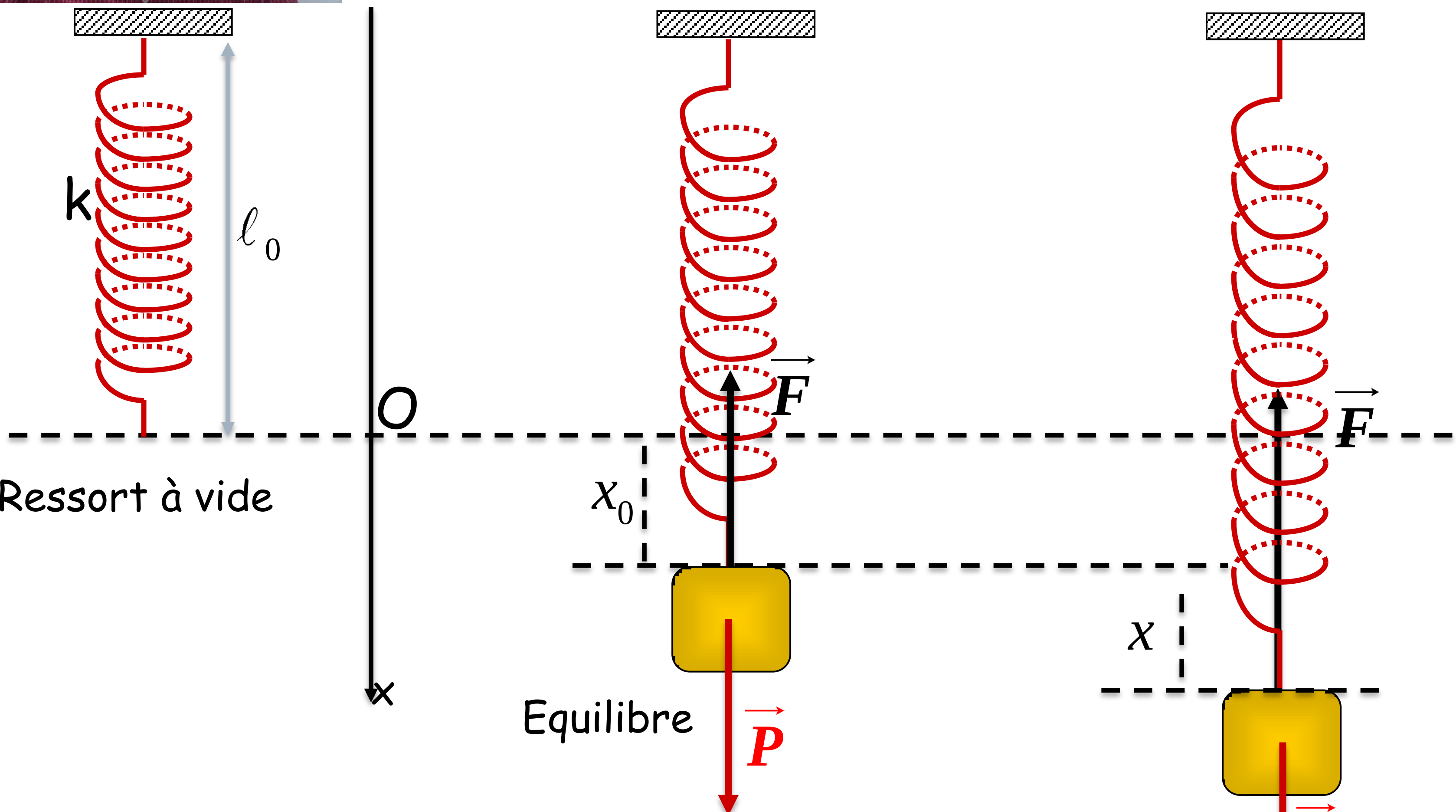
Le ressort s'allonge donc de:

$$\Rightarrow kx_0 = mg \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k}$$



VII- Forces élastiques:

2- Mouvement d'un corps suspendu à un ressort



A partir de la position d'équilibre, on tire le corps d'une distance x

VII- Forces élastiques:

2- Mouvement d'un corps suspendu à un ressort

On lâche le corps à par de cette position, il se met en mouvement donc:

$$\vec{\boldsymbol{F}} + \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow P - F = ma$$

On remplace la force F par son expression :

$$mg - k(x + x_0) = ma$$

En utilisant la condition de l'équilibre obtenu auparavant:

$$kx_0 = mg$$

On obtient alors:

$$-kx = ma$$

Et enfin::

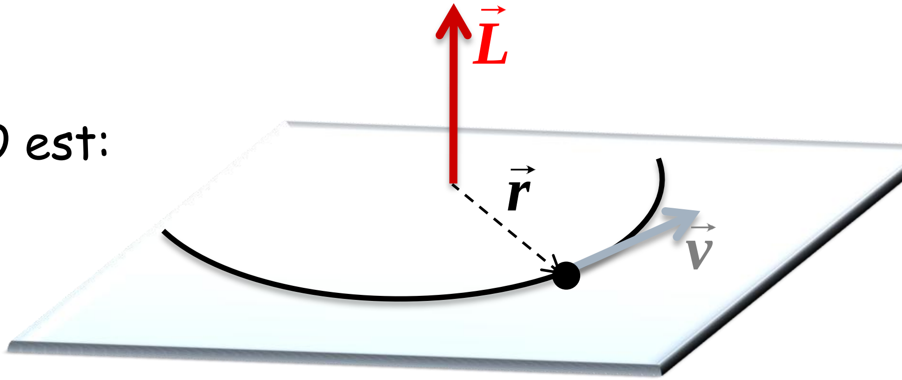
$$\Rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

C'est donc un mouvement sinusoïdal

VIII- Moment cinétique

VIII-1-Moment cinétique d'une particule

Soit une particule de masse m animée d'une vitesse v en mouvement curviligne par rapport à un point O.



Le moment cinétique de m par rapport à O est:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Le module de L est:

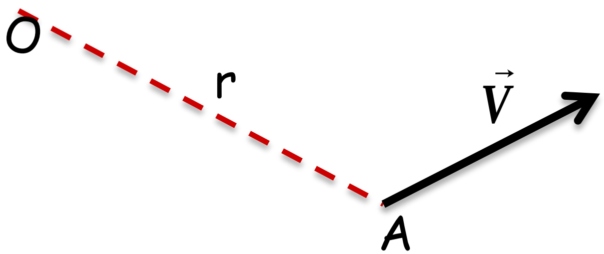
$$L = r\ p\,sin(\vec{r}, \vec{p}) = mr\,v\sin\alpha$$

$$\vec{L} \perp \vec{r} \quad et \quad \vec{L} \perp \vec{p}$$

VIII- Moment cinétique

Remarque:

On rappelle que le moment d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un point O est:



$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{V}/o} = \overrightarrow{OA} \times \vec{V}$$

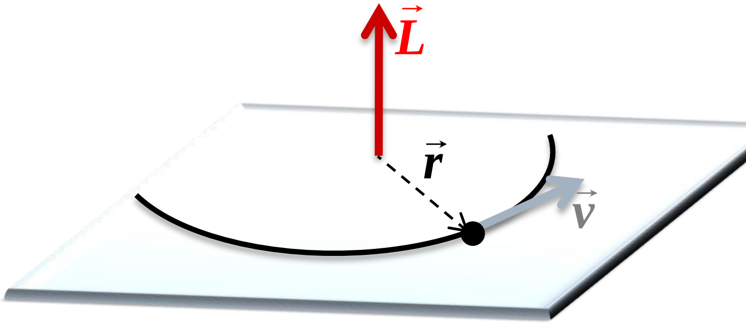
En regardant la définition du moment cinétique,

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{p}$$

On peut dire que $\vec{L}$ est le moment de $\vec{p}$ par rapport à O

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{p}/o}$$

VIII- Moment cinétique



VIII-2-Théorème du moment cinétique :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Il s'agit de trouver la dérivée du moment cinétique

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$$

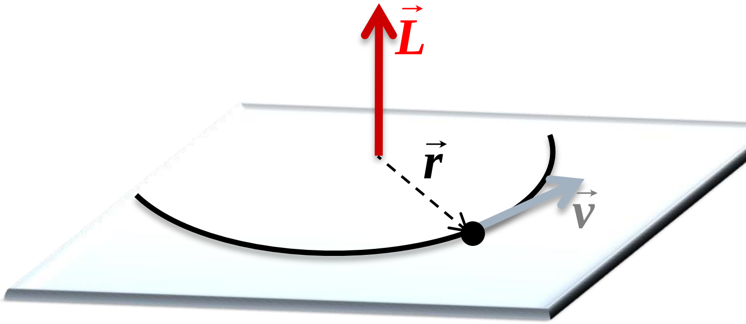
Rappel

$$(AB)' = A'B + AB'$$

En utilisant la loi de dérivation d'un produit:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

VIII- Moment cinétique



VIII-2-Théorème du moment cinétique :

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Par définition on sait que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad et \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Par définition du produit vectoriel on a:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = \vec{0} \quad (car\ \vec{v}\ //\ \vec{p})$$

$$et \quad \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

VIII- Moment cinétique

VIII-2-Théorème du moment cinétique :

On obtient finalement :

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Que l'on peut écrire sous la forme

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/o}$$

Théorème :

La dérivée du moment cinétique d'une particule, par rapport au temps est égale au moment de la force qui lui est appliquée au même point.

VIII- Moment cinétique

VIII-3-Analogie avec la deuxième loi de Newton :

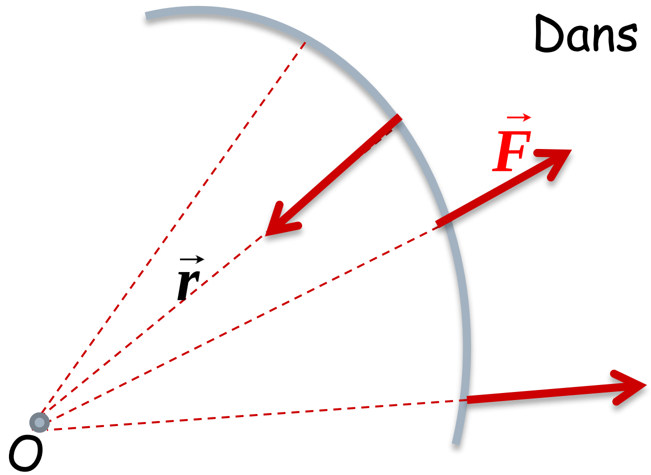
Rectiligne	Rotation
$\vec{L}$	$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{p}/o}$
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/o} = \dfrac{d\vec{\mathcal{M}}_{\vec{p}/o}}{dt}$

Le théorème du moment cinétique est donc une traduction de la deuxième loi de Newton en terme de moments

IX- Forces centrales :

IX-1-Définition d'une force centrale :

Une force centrale est celle dont la direction passe toujours par un point fixe O (centre de force).



Dans tout ces cas on a:

$$\vec{r} /\!/ \vec{F} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = constante$$

Sous l'action d'une force centrale, la moment cinétique par rapport au centre de force est constant

IX- Forces centrales :

Exemple :

- Rotation de la terre autour du soleil
- Rotation de satellite autour de la terre

IX-2- Invariant du moment cinétique :

Si on étudie le mouvement en coordonnées polaires:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = constante$$

IX- Forces centrales :

En coordonnées polaires, la vitesse s'écrit:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

On sait que les composantes s'écrivent :

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad et \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

Pour une force centrale on a donc :

$$\vec{L} = constante \Rightarrow m\,\vec{r} \times \vec{v} = Cte$$

IX- Forces centrales :

$$\vec{L} = constante \Rightarrow m\,\vec{r} \times \vec{v} = Cte$$

En remplaçant la vitesse par ses composantes on a :

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{v} = m\,\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta)$$

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{v} = m\,\vec{r} \times \vec{v}_r + m\,\vec{r} \times \vec{v}_\theta$$

Sachant que :

$$\vec{r} \mathbin{//} \vec{v} \Rightarrow m\,\vec{r} \times \vec{v}_r = 0$$

$$\vec{r} \perp \vec{v}_\theta \Rightarrow \left| m\,\vec{r} \times \vec{v}_\theta \right| = m\,r\,v_\theta$$

IX- Forces centrales :

Finalement on obtient :

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{v}_\theta\right| = \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{r}\,v_\theta = Cte$$

Ou encore :

$$\left|\vec{L}\right| = \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{r}\,(r\frac{d\theta}{dt}) = Cte$$

Comme la masse m est constante l'invariant s'écrit donc:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = Cte$$

On encore sous la forme:

$$r^2\dot{\theta} = Cte$$

IX- Forces centrales :

Johannes Kepler (1571-1630)

IX-3- 2ème loi de Kepler (loi des aires):

Comme dr est petit l'aire décrite par la planète pendant un temps dt s'écrit :

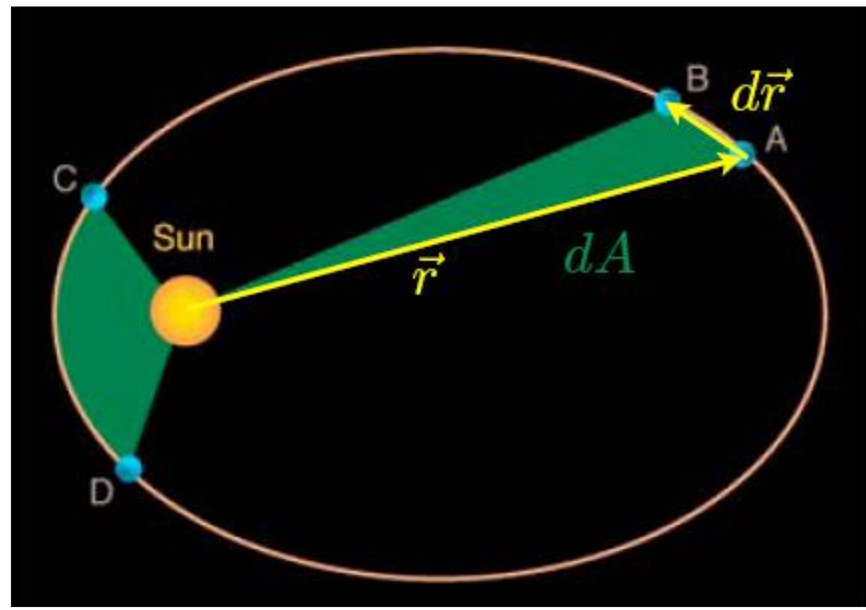
$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right|$$

En introduisant la vitesse on a :

$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| dt$$

Que l'on peut écrire :

$$dA = \frac{1}{2}\frac{L}{m}dt$$



IX- Forces centrales :

Johannes Kepler (1571-1630)

IX-3- 2ème loi de Kepler (loi des aires):

$$dA = \frac{1}{2}\frac{L}{m}dt$$

Comme la force est centrale donc le moment cinétique est constant:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{L}{m} \qquad \Rightarrow \frac{dA}{dt} = C^{te}$$

En intégrant, on obtient :

$$\int dA = C^{te}\int dt$$

En intégrant, on obtient :

$$A(t) = C^{te}.t$$