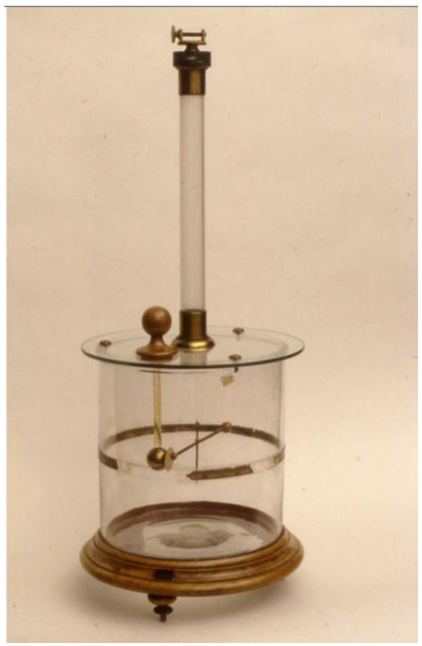
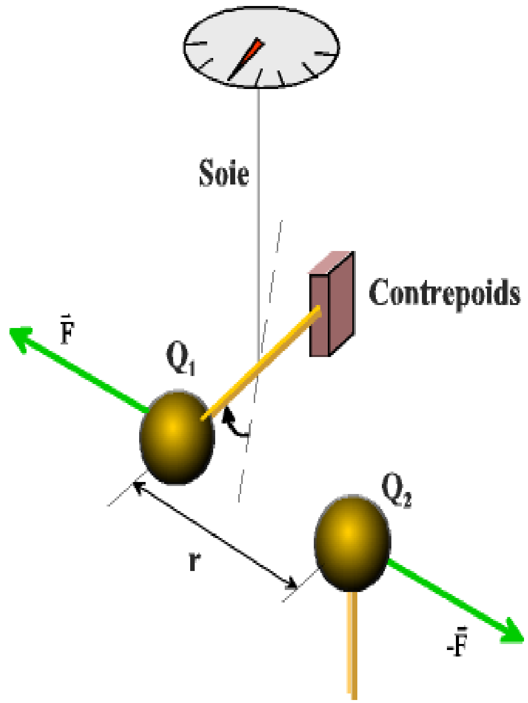
MODULE D'ELECTRICITE

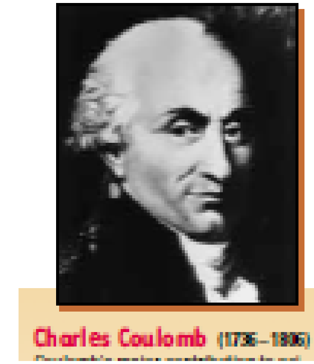
Plan du cours

- ELECTROSTATIQUE
- CHAMPS ET POTENTIELS
- CONDUCTEURS
- CONDUCTION ELECTRIQUE
- RESEAUX ELECTRIQUES
- PHENOMENES MAGNETIQUES

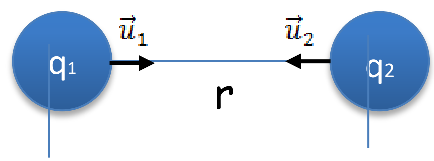




1- FORCE ELECTRIQUE (N)



$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\ 10^9\ MKSA$$



La force F1 appliquée par q_1 sur q_2 : $\vec{F}_1 = K\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_1$

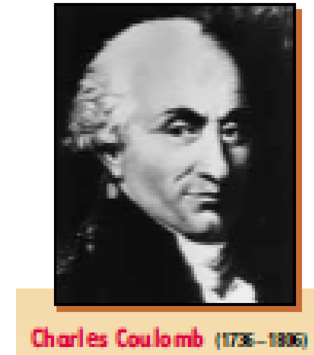
La force F2 appliquée par q_2 sur q_1 : $\vec{F}_2 = K\dfrac{q_2 q_1}{r^2}\vec{u}_2$

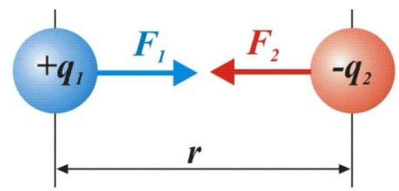
$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$$

1- FORCE ELECTRIQUE (N)

$$\vec{F}_1 = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_1$$

$$\vec{F}_2 = K\frac{q_2 q_1}{r^2}\vec{u}_2$$



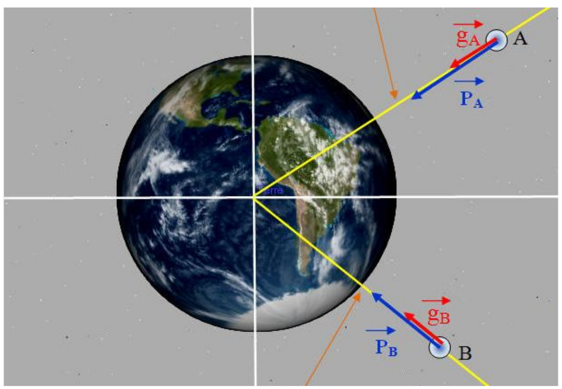


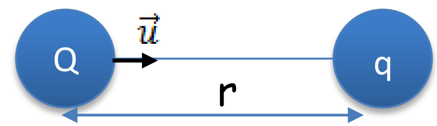
-q1 -q2

Deux charges de mêmes signes se repoussent et deux charges de signes contraires s'attirent

2- ANALOGIE

Force Gravitationnelle (Newton)	Force Electricité (Coulomb)





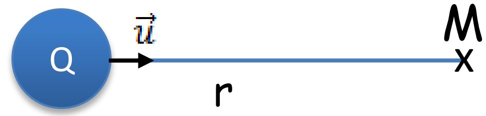
Force gravitationnelle: $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\,\vec{u}$

Champ gravitationnel: $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\,\vec{u}$

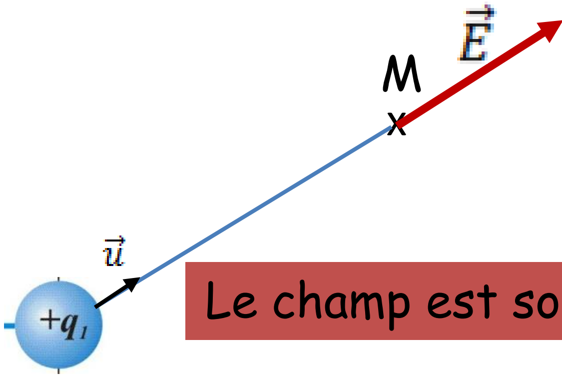
Force électrique: $\vec{F} = K\frac{Qq}{r^2}\,\vec{u}$

Champ électrique: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}$

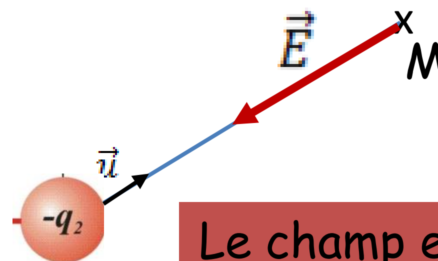
2- CHAMP ELECTRIQUE (V/m)



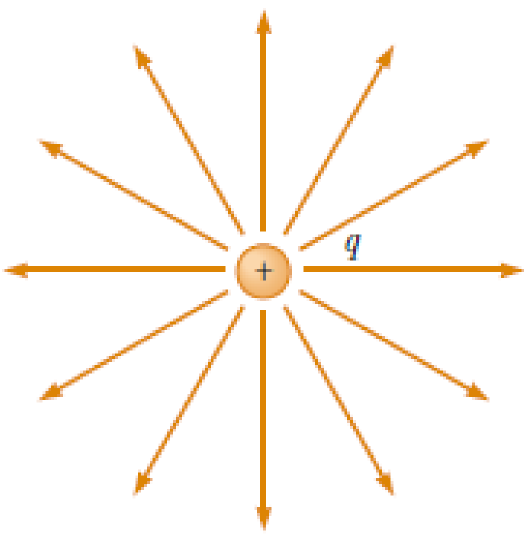
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K\frac{Q}{r^2}\,\vec{u}$$

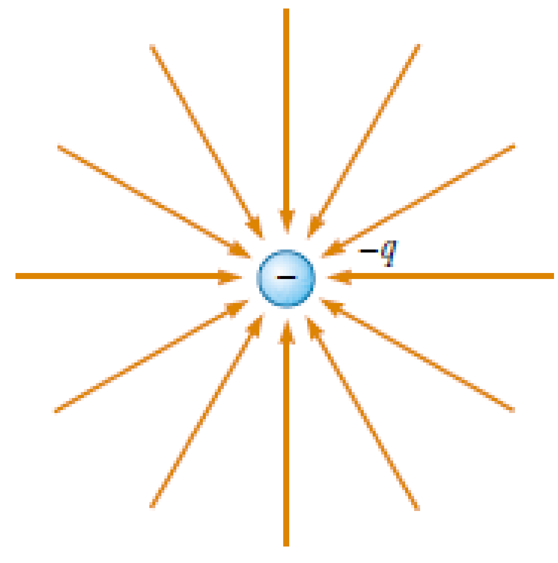


Le champ est sortant



Le champ est rentrant





3- ENERGIE POTENTIELLE ELECTRIQUE (J)

L'énergie potentielle électrique est le travail nécessaire à la force électrique pour ramener une charge ponctuelle (q)de l'infini jusqu'à une distance r d'une autre charge Q.

$$W = \int_{\infty}^{r} \vec{F}.\vec{dl} = \int_{\infty}^{r} K\frac{Qq}{r^2}\,\vec{u}.\vec{dl} = -\Delta E_p$$

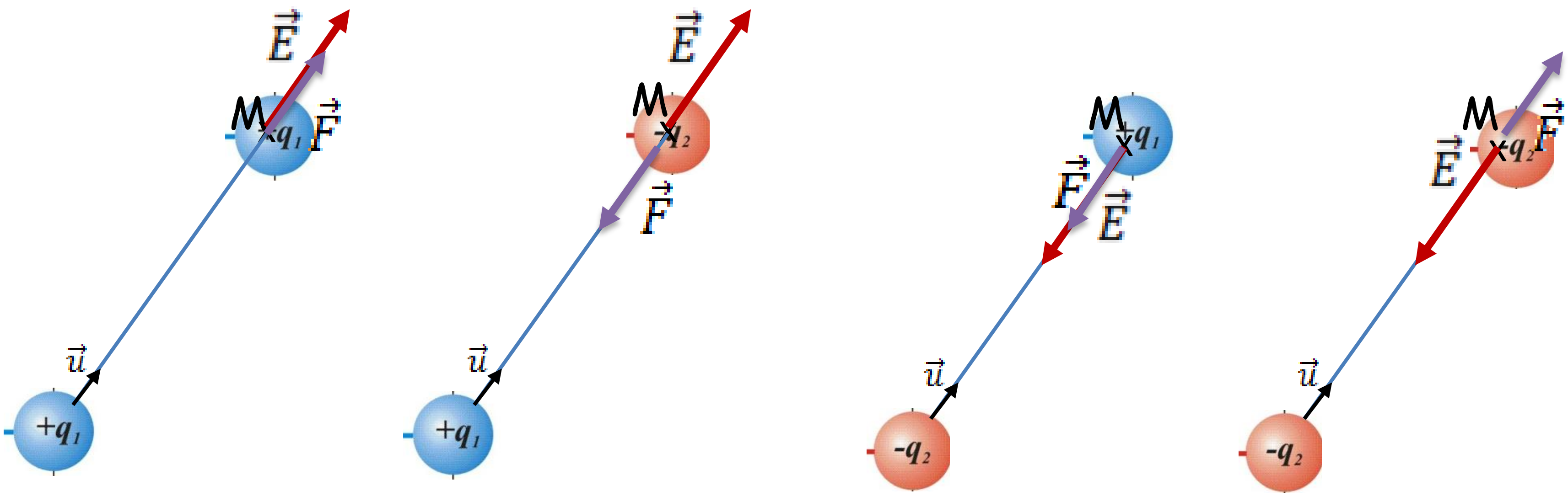
Alors: $E_p(r) = K\dfrac{Qq}{r}$ $\quad$ *avec:* $E_p(\infty) = 0$

4- POTENTIEL ELECTRIQUE (V)

De même que pour la force, il y a une relation entre le potentiel et l'énergie potentielle

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{q} = K\frac{Q}{r}$$

5- RESUME



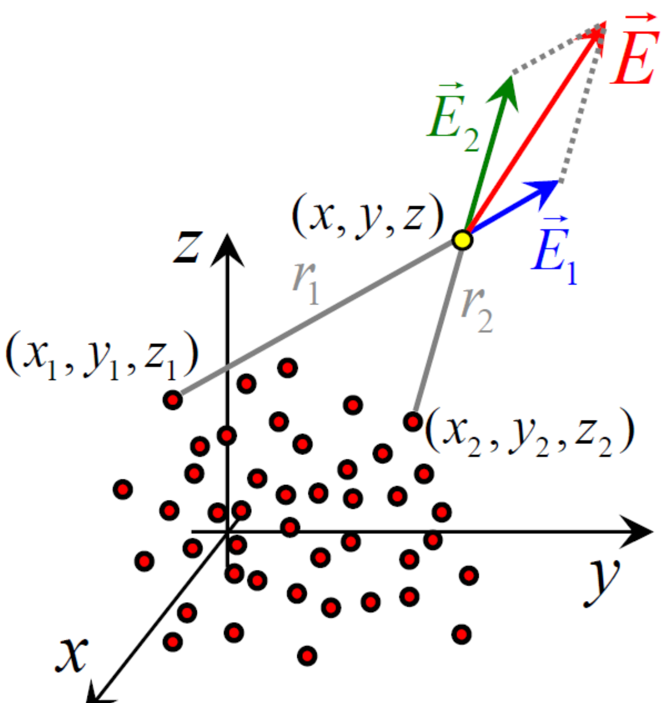
6- PRINCIPE DE SUPERPOSITION

On considère un ensemble de N charges ponctuelles, on cherche le champ crée par toutes ces charges en un point M de l'espace.

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

Le potentiel crée au point M s'écrit:

$$V_M = V_1 + V_2 + \cdots + V_N = \sum_{i=1}^{N} V_i$$



Si on met une charge Q au point M, la force créée est:

$$\vec{F}_M = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = Q\,\vec{E}_M$$

Et l'énergie potentielle en ce point est:

$$E_{pM} = E_{p1} + E_{p2} + \cdots + E_{pN} = \sum_{i=1}^{N} E_{pi} = Q V_M$$

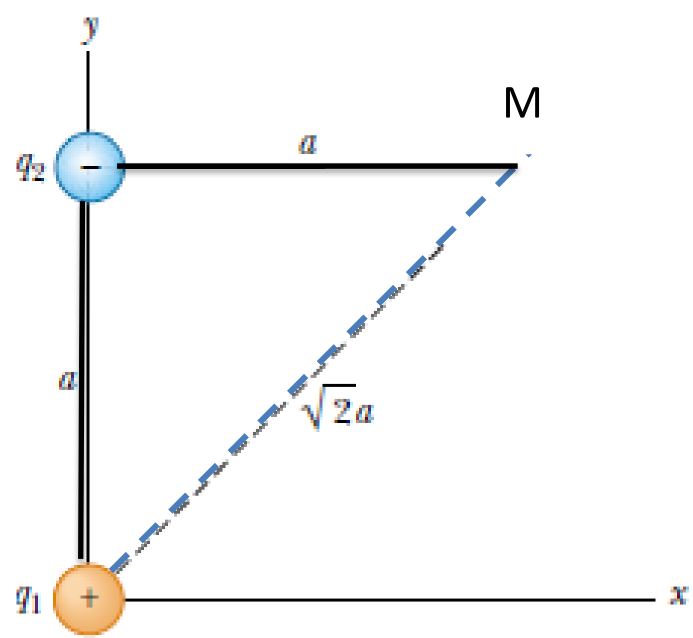
EXERCICE D'APPLICATION

Soient deux charges ponctuelles q_1=5μC et q_2= -2μC , placées au sommet d'un triangle rectangle isocèle de côté a = 0.1 m(voir figure).

1- Calculer et représenter le champ électrique crée par ces charges sur l'autre sommet

2- Déterminer le potentiel en ce point

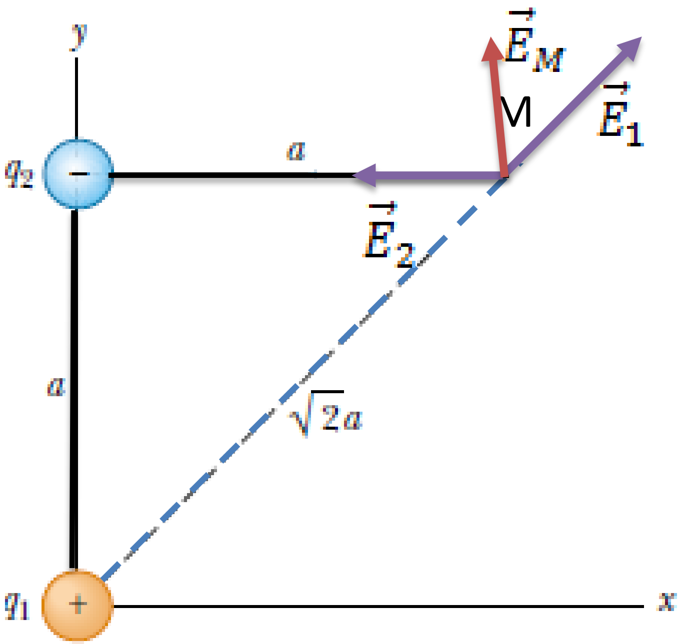
3- On place en ce point une troisième charge q_3=5μC , déduire la force et l'énergie potentielle en ce point.



Corrigé

1- Calcul du champ électrique:

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



$$|\vec{E}_1| = K\frac{q_1}{(a\sqrt{2})^2} = 22.5\ 10^5\ V/m \quad (2.5\ \text{cm})$$

$$|\vec{E}_2| = K\frac{q_2}{a^2} = 18\ 10^5\ V/m \quad (2\ \text{cm})$$

Echelle : 1 cm $\longrightarrow$ 9 10^5 V/m

$$\vec{E}_M = \begin{cases} E_x = E_1 cos45 - E_2 = 2.09\ 10^5\ V/m \\ E_y = E_1 sin45 \quad = 15.9\ 10^5\ V/m \end{cases} \Rightarrow E_M = 16.04\ 10^5\ V/m$$

2- Calcul du potentiel :

$$V_M = V_1 + V_2$$

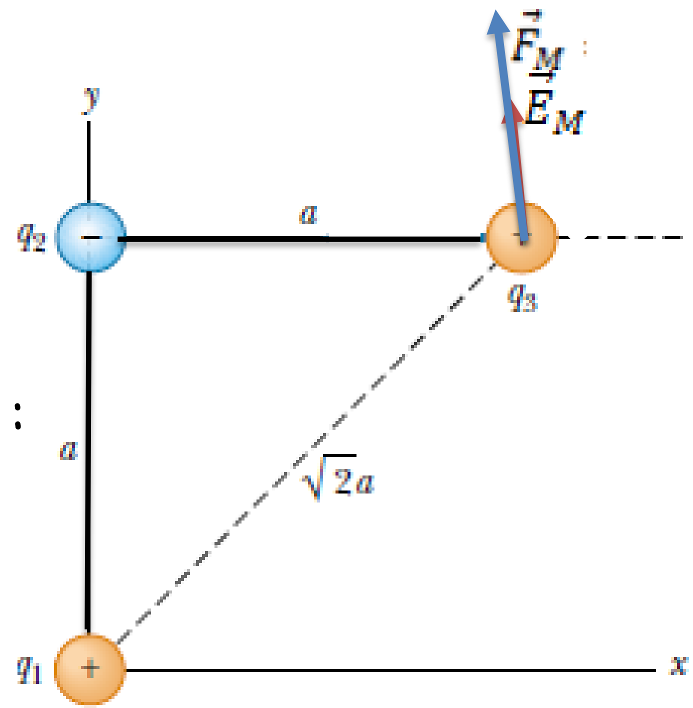
$$V_M = K\frac{q_1}{a\sqrt{2}} + K\frac{q_2}{a} = \frac{K}{a}\left(\frac{q_1}{\sqrt{2}} + q_2\right)$$

$$V_M = 13.82\ 10^4\ V$$

3- a- Calcul de la force électrique :

$$\vec{F}_M = Q\vec{E}_M$$

$$F_M = 8.02\ N$$



3- b- Calcul de l'énergie potentielle :

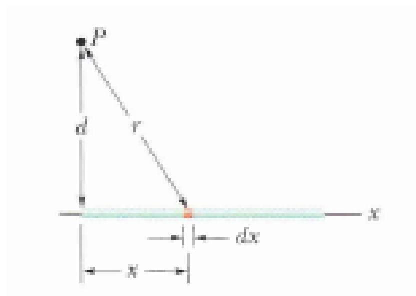
$$E_{pM} = QV_M$$

$$E_{pM} = 0.69\ J$$

7- CAS DE DISTRIBUTION CONTINUES

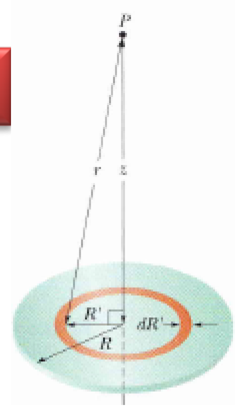
$$d\vec{E} = K\frac{dq}{r^2}\vec{u} \qquad dV = K\frac{dq}{r}$$

A- densité linéaire:



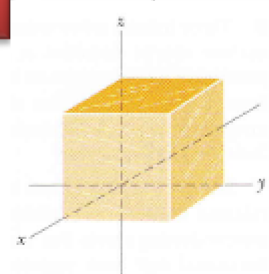
$$dq = \lambda dl \qquad \vec{E} = \int K\frac{dq}{r^2}\vec{u} \quad et \quad V = \int K\frac{dq}{r}$$

B- densité surfacique:



$$dq = \sigma dS \qquad \vec{E} = \iint K\frac{dq}{r^2}\vec{u} \quad et \quad V = \iint K\frac{dq}{r}$$

C- densité volumique :



$$dq = \rho dV \qquad \vec{E} = \iiint K\frac{dq}{r^2}\vec{u} \quad et \quad V = \iiint K\frac{dq}{r}$$

8- RELATIONS ENTRE LE CHAMPS E ET LE POTENTIEL V

Nous partons des relations connues en mécanique entre la force et l'énergie potentielle

$$dE_p = -\vec{F}.d\vec{l} \qquad \text{et} \qquad \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$$

Et sachant que :

$$\vec{F} = Q\vec{E} \qquad \text{et} \qquad E_p = QV$$

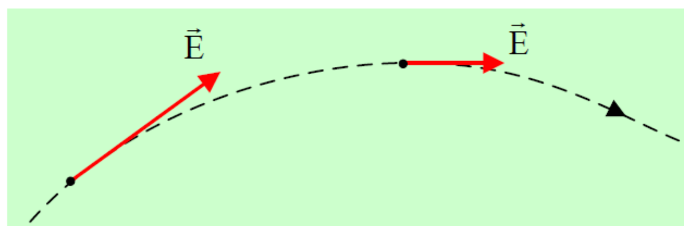
On remplace dans les deux première expressions et on simplifie par Q on a:

$$dV = -\vec{E}.d\vec{l} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

9- LIGNES DE CHAMPS ET EQUIPOTENTIELLES

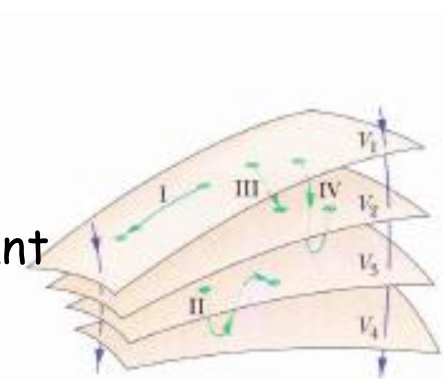
A- LIGNES DE CHAMPS

Les lignes de champs électrique sont des surfaces sur lesquelles le champ E est tangent



B- EQUIPOTENTIELLES

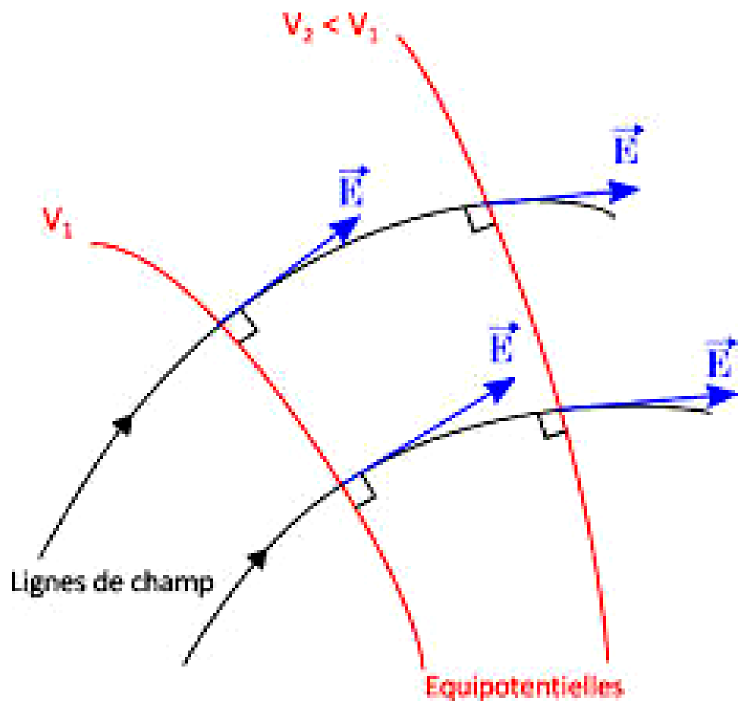
Ce sont des surfaces sur lesquelles le potentiel V est constant



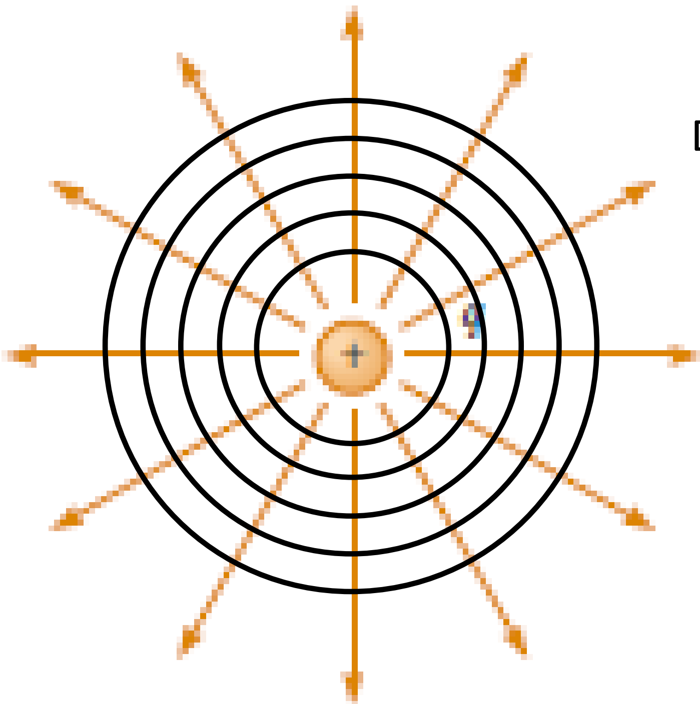
PROPRIETES :

❖Les lignes de champs sont perpendiculaires aux équipotentielles

❖ Les lignes de champs vont du potentiel le plus grand au plus petit

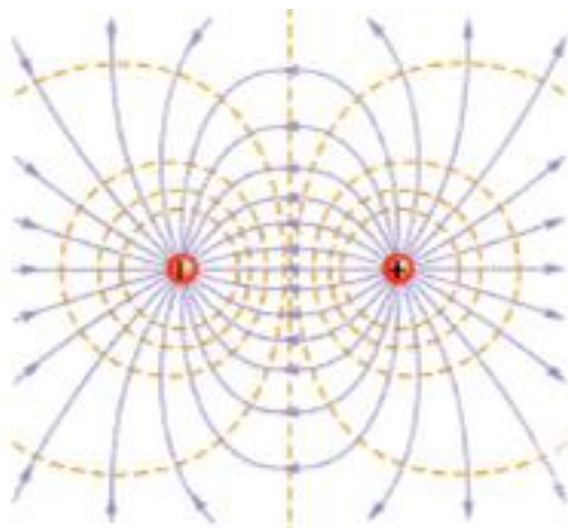


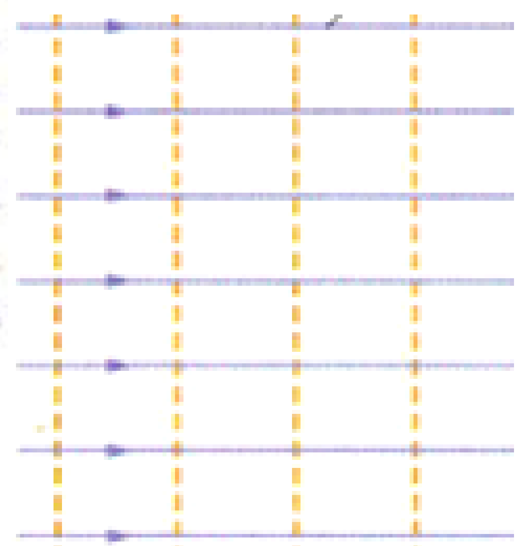
EXEMPLE DE LIGNES DE CHAMPS ET EQUIPOTENTIELLES POUR DES DISTRIBUTIONS DE CHARGES



Charge ponctuelle positive

Deux charges ponctuelles opposées

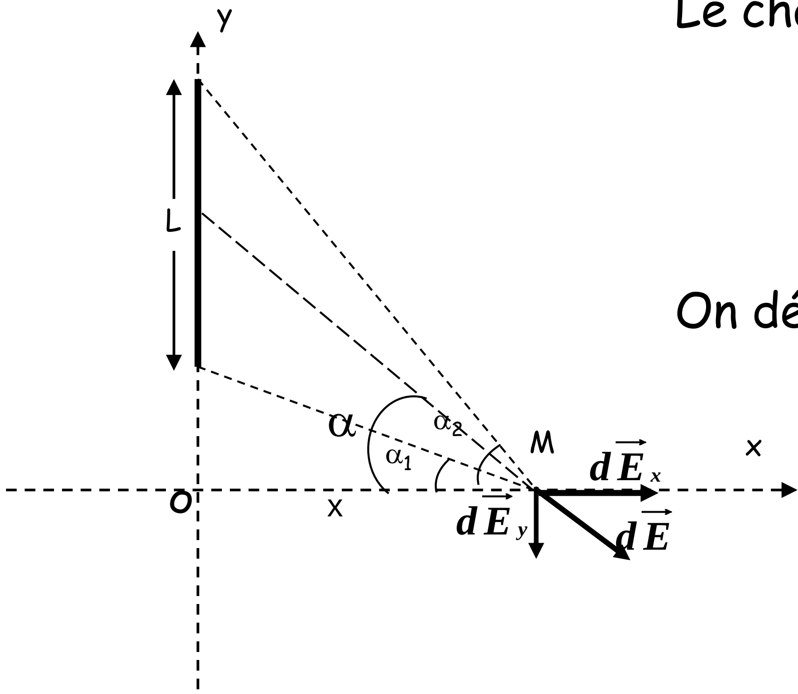




Champ électrique constant horizontal

10- EXEMPLES DE CALCUL DE CHAMPS ET DE POTENTIEL DE CHARGES CONTINUES

a- Fils chargé uniformément de densité λ (C/m)



Le champ crée par un élément dy au point M s'écrit:

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{r^2}\vec{u} = \frac{K\lambda dy}{r^2}\vec{u}$$

On décompose suivant ox et oy on obtient:

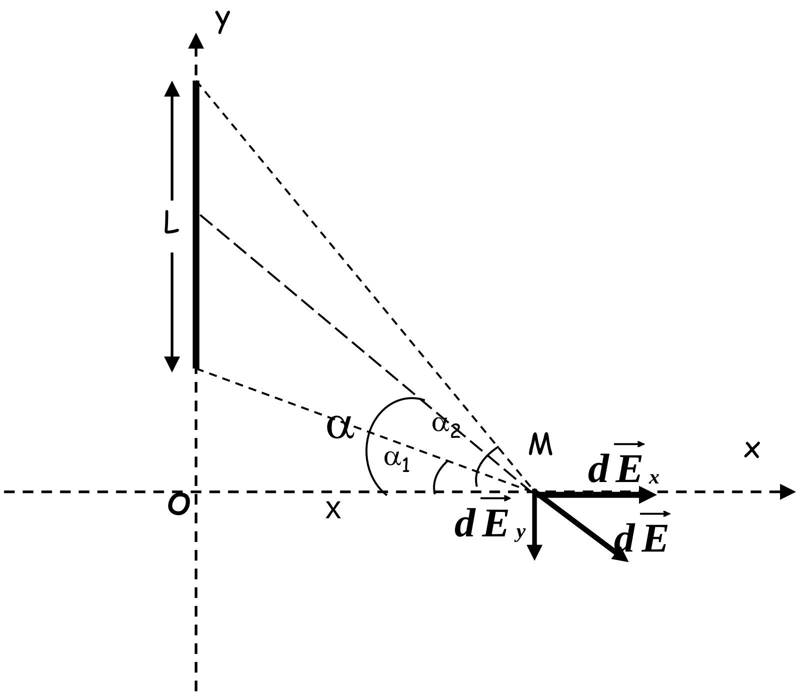
$$\overrightarrow{dE} = \begin{cases} dE_x = dE\cos\alpha \\ dE_y = -dE\sin\alpha \end{cases}$$

On exprime tout en fonction de l'angle α :

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos\alpha} \quad et \quad tg\alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xtg\alpha \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

a- Fils chargé uniformément de densité λ (C/m)

On obtient alors en remplaçant



$$\begin{cases} dE_x = dE\cos\alpha = \dfrac{K\lambda dy}{r^2}\cos\alpha = \dfrac{K\lambda}{x}\cos\alpha \\ dE_y = -dE\sin\alpha = -\dfrac{K\lambda dy}{r^2}\sin\alpha = -\dfrac{K\lambda}{x}\sin\alpha \end{cases}$$

En intégrant entre α_1 et α_2 on a :

$$E_x = \frac{K\lambda}{x}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

$$E_y = \frac{K\lambda}{x}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

a- Fils chargé uniformément de densité λ (C/m)

- Si le fil est infini , c'est-à-dire $\alpha_1 = -\pi/2$ *et* $\alpha_2 = \pi/2$ et enfin :

$$E_x = \frac{2K\lambda}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \quad et \quad E_y = 0$$

❑ Potentiel crée par un fils infini à une distance x du fils

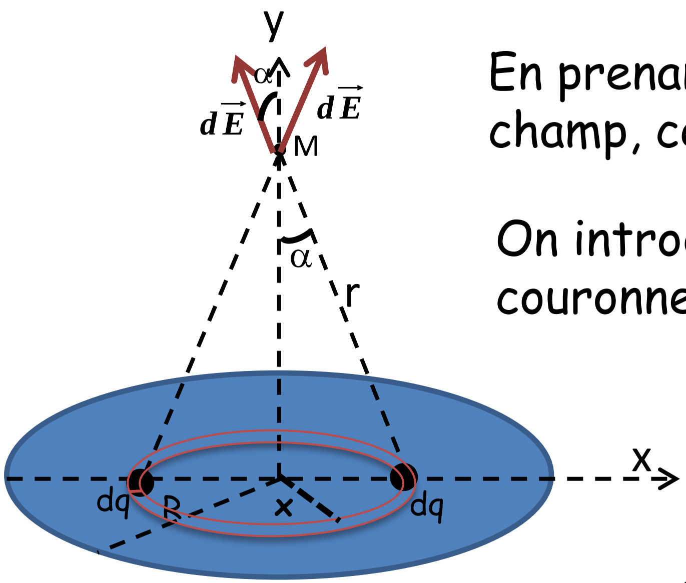
$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -E_x dx$$

$$V = -\int \vec{E}.\vec{dl} = -\int E_x dx = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{x} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x + Cte$$

b-Disque de rayon R, chargé uniformément de densité σ (C/m^2)

Le champ crée par un élément dS au point M s'écrit:

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{r^2}\vec{u} = \frac{K\sigma dS}{r^2}\vec{u}$$



En prenant une élément symétrique à dS on obtient un autre champ, ce qui donne une composante globale suivant l'axe oy

On introduit un élément de surface dS sous forme d'une couronne

Cette couronne de rayon x et largeur dx s'écrit:

$$dS = 2\pi x\,dx$$

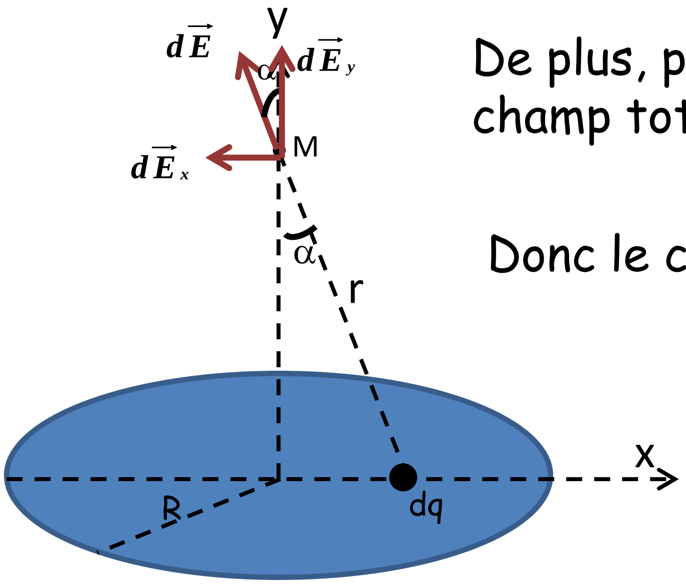
L'élément de champ dE créé par cette couronne s'écrit:

$$dE = \frac{K\sigma 2\pi x dx}{r^2}$$

b-Disque de rayon R, chargé uniformément de densité σ (C/m²)

En décomposant les champs suivant ox et oy on constate que :

$$dE_x = dE\sin\alpha \qquad\qquad dE_y = dE\cos\alpha$$



De plus, par raison de symétrie, la composante du champ total suivant ox est nulle

Donc le champ total est suivant oy et s'écrit:

$$E = \iint dE_y$$

b-Disque de rayon R, chargé uniformément de densité σ (C/m^2)

Ecrivant la composante du champ suivant oy

$$dE_y = dE\cos\alpha = \frac{K\sigma 2\pi x dx}{r^2}\cos\alpha$$

Exprimons cette composante en fonction d'une seule variable x qui varie entre 0 et R

$$r = \left(y^2 + x^2\right)^{1/2} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}} \quad et \quad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Elle prend la forme:

$$dE_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{yxdx}{\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

b-Disque de rayon R, chargé uniformément de densité σ (C/m²)

Le champ total suivant oy s'écrit donc:

$$E = \int_0^R dE_y = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{x dx}{\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Pour faire cette intégrale on fait le changement de variable suivant:

$$U = y^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad dU = 2x dx \qquad \textit{avec les bornes}: \begin{cases} x = 0 & \rightarrow U = y^2 \\ x = R & \rightarrow U = y^2 + R^2 \end{cases}$$

L'intégrale devient plus simple et s'écrit:

$$E = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0} \int_{y^2}^{(y^2+R^2)} \frac{dU}{2U^{3/2}} \qquad\qquad E = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0} \left[-U^{-1/2}\right]_{y^2}^{(y^2+R^2)}$$

b-Disque de rayon R, chargé uniformément de densité σ (C/m²)

Le résultat s'écrit sous la forme:

$$E = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(y^2+R^2)}}\right] \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{y}{|y|} - \frac{y}{\sqrt{(y^2+R^2)}}\right]$$

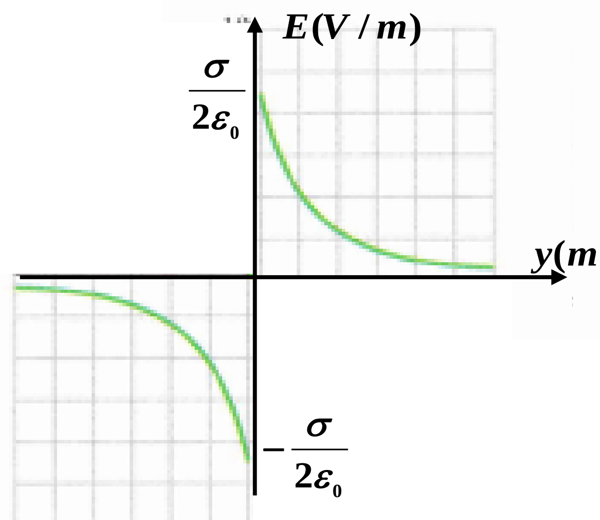
On obtient alors deux champs :

Pour y > 0 on a: |y|=y

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{y}{\sqrt{(y^2+R^2)}}\right]$$

Pour y < 0 on a : |y|=-y

$$E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 + \frac{y}{\sqrt{(y^2+R^2)}}\right]$$



❑ Potentiel crée par un disque uniformément chargé

A- Méthode directe:

$$dV = \frac{Kdq}{r} = \frac{K\sigma dS}{r}$$

On prend la même surface que pour le champ et exprime en fonction de x et y

$$dS = 2\pi x\, dx \qquad\qquad r = \left(y^2 + x^2\right)^{1/2} \quad et \quad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Ce qui donne:

$$dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{xdx}{\left(y^2 + x^2\right)^{1/2}}$$

❑ Potentiel crée par un disque uniformément chargé

En intégrant on obtient:

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{xdx}{\left(y^2 + x^2\right)^{1/2}}$$

En faisant le même changement de variable que pour E on a:

$$U = y^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad dU = 2xdx \qquad \textit{avec les bornes}: \begin{cases} x = 0 & \rightarrow U = y^2 \\ x = R & \rightarrow U = y^2 + R^2 \end{cases}$$

$$V = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\int_{y^2}^{(y^2+R^2)} \frac{dU}{2U^{1/2}}$$

Donc

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{(y^2 + R^2)} - |y|\right]$$

❑ Potentiel crée par un disque uniformément chargé

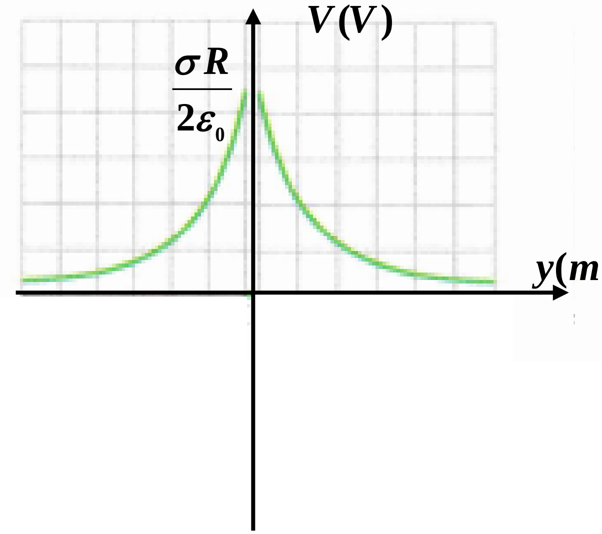
On a donc deux potentiels :

Pour y > 0 on a: |y|=y

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{(y^2+R^2)} - y\right]$$

Pour y < 0 on a : |y|=-y

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{(y^2+R^2)} + y\right]$$



❑ Potentiel crée par un disque uniformément chargé

B- Méthode à partir du champ électrique:

On prend uniquement le cas ou y est positif :

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -Edy$$

$$V = -\int Edy = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int\left[1-\frac{y}{\sqrt{(y^2+R^2)}}\right]dy \qquad V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\int dy - \int\frac{ydy}{\sqrt{(y^2+R^2)}}\right]$$

En faisant le même changement de variables on obtient:

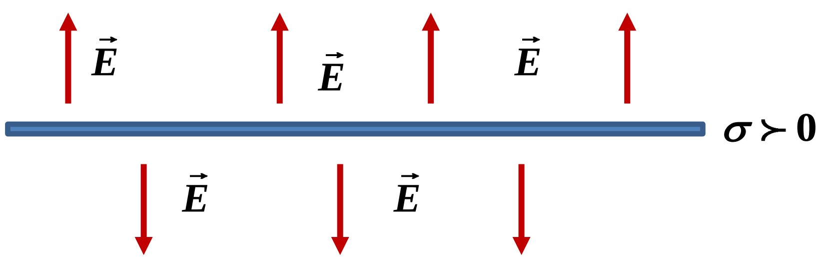
$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{(y^2+R^2)} - y\right] + cte$$

La constante s'annule en posant comme référence V(∞)=0

REMARQUE:

Si le rayon est très grand (R tend vers l'infini), le disque devient un plan infini

Le champ devient: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ Il est indépendant de y



Le potentiel quand à lui devient:

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -E dy \qquad V = -\int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dy = -\frac{\sigma y}{2\varepsilon_0} + cte$$

11- Energie interne d'un système de N charges ponctuelles

A- Energie potentielle

Soit une charge q soumise à une force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$. On la déplace de l'infini à un point M de potentiel V_M

$$W = \int_{\infty}^{M} \vec{F}.\vec{dl} = \int_{\infty}^{M} q\vec{E}.\vec{dl} = -q\int_{\infty}^{M} dV$$

$$E_{pM} = qV_M$$

B- Energie interne d'un système de deux charges

Soit une charge q_1 qui a un potentiel V_1 en un point M. Si on ramène une charge q_2 au point M, l' énergie potentielle du système de deux charges s'écrit:

$$E_p = q_2 V_1 = \frac{Kq_1 q_2}{r}$$

Cette quantité est l'énergie interne du système de deux charges notée U

11- Energie interne d'un système de N charges ponctuelles

C- Energie interne d'un système de trois charges

Soit un système constitué de trois charges ponctuelles, son énergie interne s'écrit:

$$U = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{Kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{Kq_2q_3}{r_{23}}$$

D- Energie interne d'un système de N charges

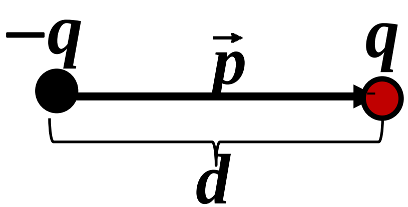
Soit un système constitué par N charges ponctuelles, son énergie interne s'écrit:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1\, i\neq j}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{Kq_iq_j}{r_{ij}}$$

12- Dipôle électrique

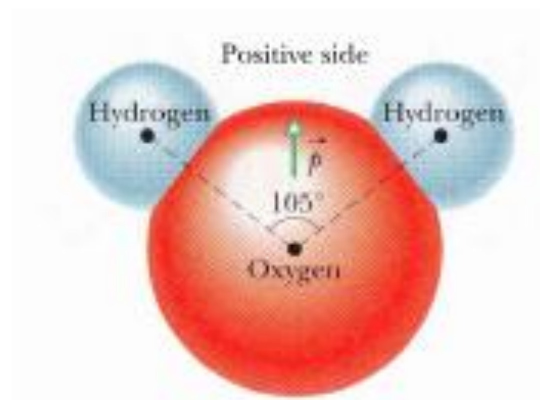
A- Définition

Soient deux charges ponctuelles q égales et de signes opposés, placés à une distance d l'une de l'autre. Le moment dipolaire électrique est:



$$\vec{p} = q\vec{d}$$

B-Exemples de dipôles électriques



C- Potentiel électrique créé par un dipôle :

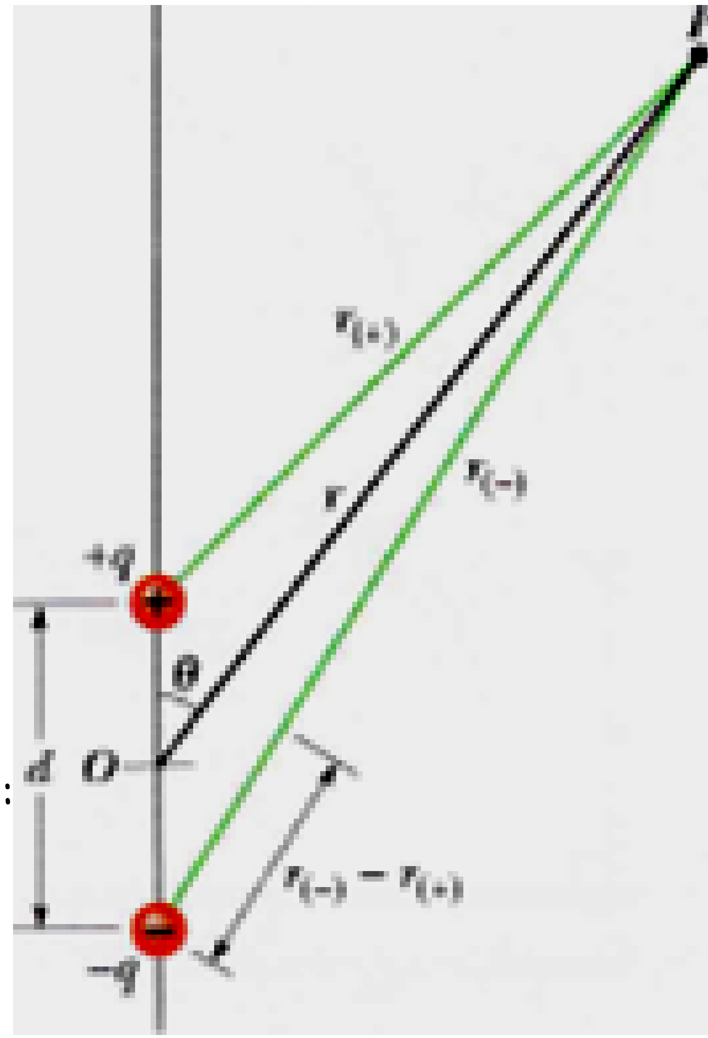
$$V = V_{+} + V_{-} = \frac{Kq}{r_{+}} - \frac{Kq}{r_{-}} = Kq\left(\frac{1}{r_{+}} - \frac{1}{r_{-}}\right)$$

En réduisant au même dénominateur on a:

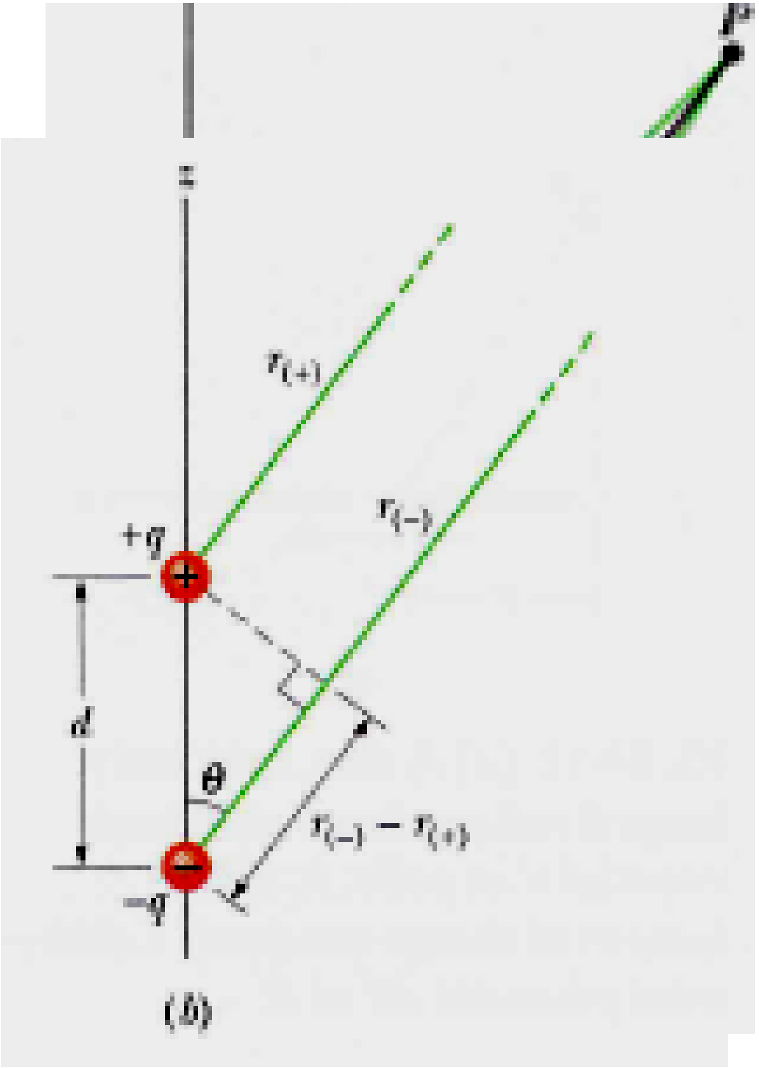
$$V == Kq\left(\frac{r_{-} - r_{+}}{r_{+} r_{-}}\right)$$

Pour que notre système forme un dipôle il faut que :

$$r_{-}, r_{+} \ et \ r \gg d$$



C- Potentiel électrique créé par un dipôle :



En zoomant au voisinage des charges on a:

$$r_- - r_+ = d\cos\theta \quad et \quad r_+ r_- \simeq r^2$$

$$V == Kq\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{Kp\cos\theta}{r^2}$$

D- Champ électrique créé par un dipôle :

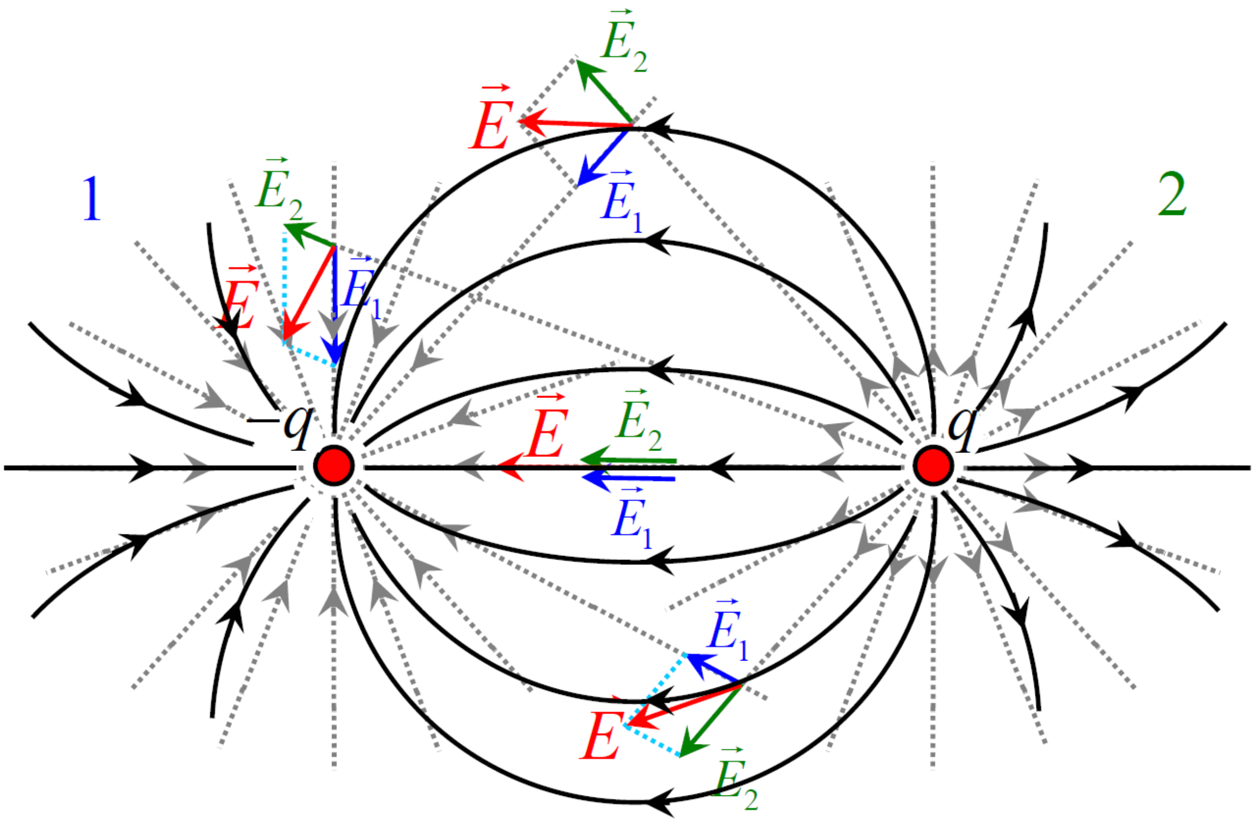
En utilisant les coordonnées polaires on peut écrire

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$$

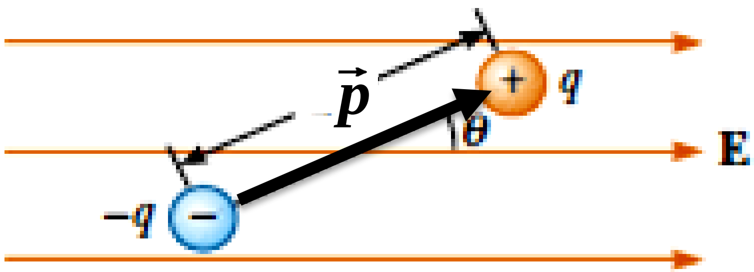
$$\Rightarrow \begin{cases} E_r = \dfrac{2Kp\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = \dfrac{Kp\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{Kp}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

E- lignes de champs d'un dipôle :



F- Action d'un champ électrique extérieur sur un dipôle



En mettant le dipôle dans une région ou règne un champ électrique uniforme, il y a création d'un moment du couple et d'une énergie potentielle

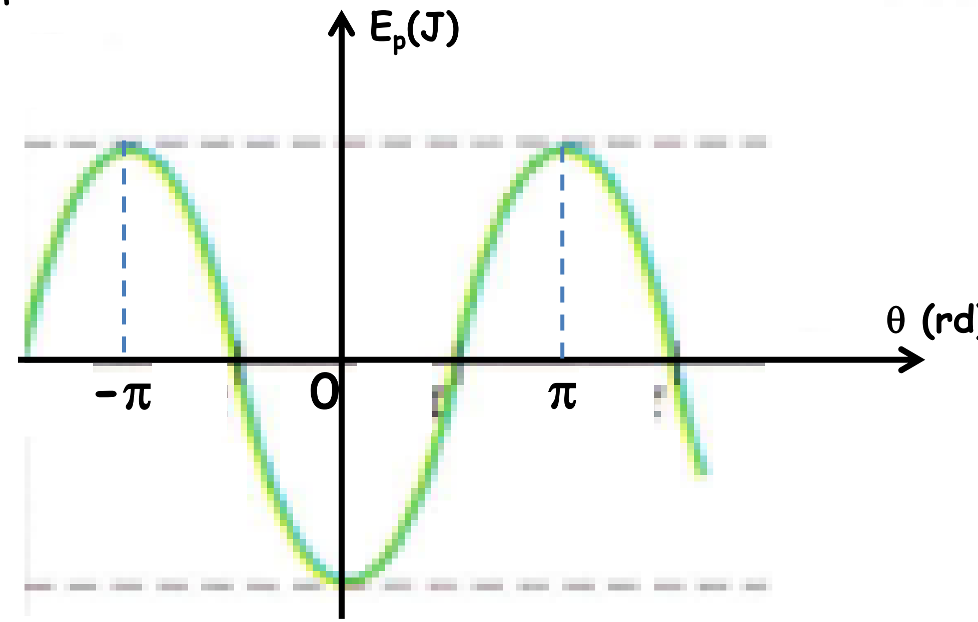
Energie potentielle

Elle s'écrit sous la forme :

$$E_p = -\vec{E}.\vec{p} \Rightarrow E_p = -E\ p\cos\theta$$

F- Action d'un champ électrique extérieur sur un dipôle

On trace le graphe de E_p en fonction de θ



Les extremums de E_p correspondent à des positions d'équilibre

- Minimum $\theta = 0$: équilibre stable

- Maximum $\theta = \pi$: équilibre instable

F- Action d'un champ électrique extérieur sur un dipôle

Moment du couple

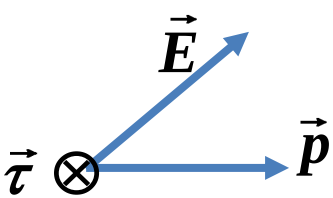
Le moment du couple est donné par la relation $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

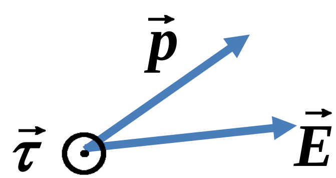
- Son module s'écrit : $\tau = p\,E \sin\theta$

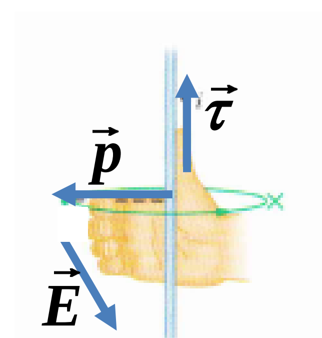
- Propriétés:

➢ $\vec{\tau} \perp \vec{p}$ *et* $\vec{\tau} \perp \vec{E}$

➢ le sens et la direction sont obtenues en utilisant la règle de la main droite

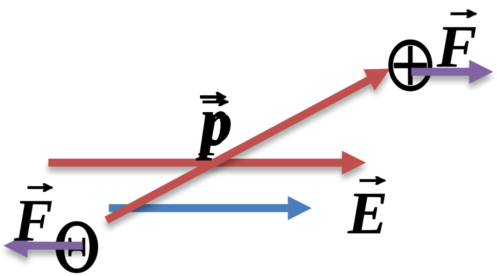




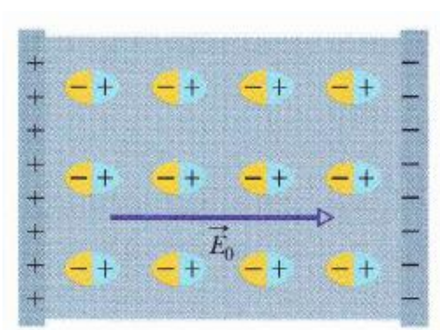


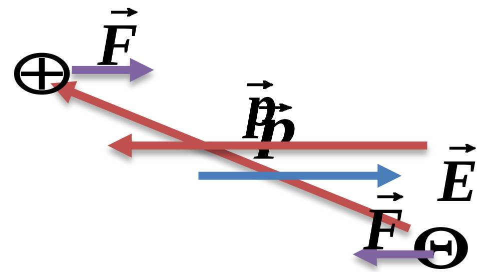
F- Action d'un champ électrique extérieur sur un dipôle

- Positions d'équilibre

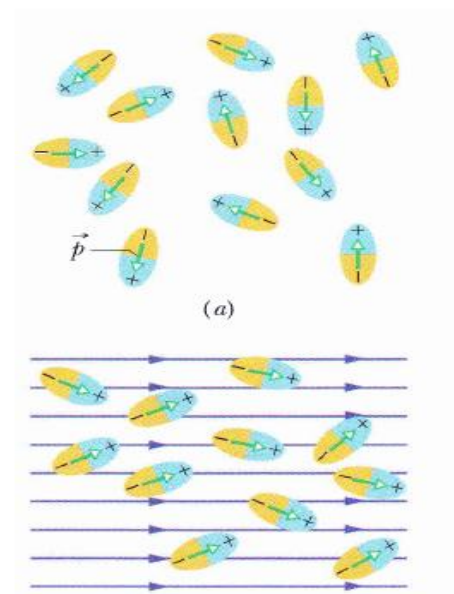


- Positions d'équilibre stable





- Positions d'équilibre instable



Exercice d'application

Un dipôle , de moment dipolaire p, est placé au centre d'un cercle de rayon R. donnez les expressions du potentiel et champ électriques créés par ce dipôle aux points A, B, C et D.

Corrigé

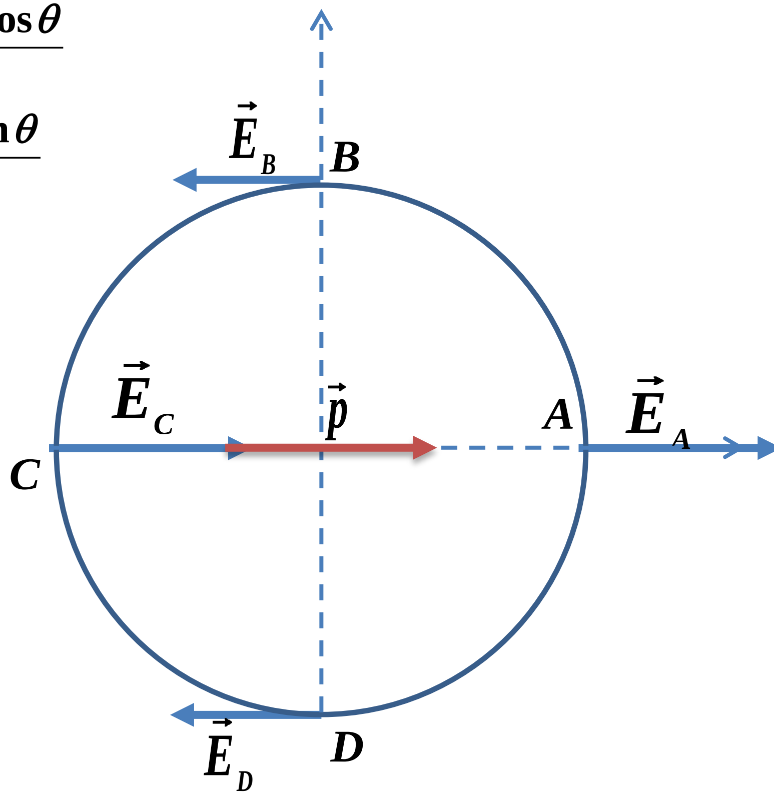
$$V = \frac{Kp\cos\theta}{r^2} \qquad \vec{E} \Rightarrow \begin{cases} E_r = \dfrac{2Kp\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = \dfrac{Kp\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

$$En\ A: \quad \theta = 0 \Rightarrow V_A = \frac{Kp}{R^2}\ et \quad E = E_r = \frac{2Kp}{R^3}$$

$$En\ B: \quad \theta = \pi/2 \Rightarrow V_B = 0\ et \quad E_B = E_\theta = \frac{Kp}{R^3}$$

$$En\ C: \quad \theta = \pi \Rightarrow V_C = -\frac{Kp}{R^2}\ et \quad E_C = E_r = -\frac{2Kp}{R^3}$$

$$En\ D: \quad \theta = -\pi/2 \Rightarrow V_D = 0\ et \quad E_D = E_\theta = -\frac{Kp}{R^3}$$

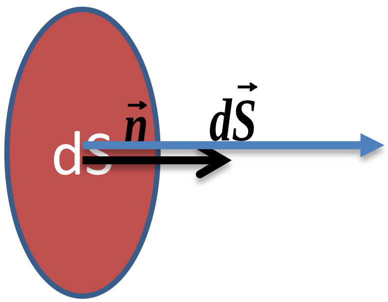


12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

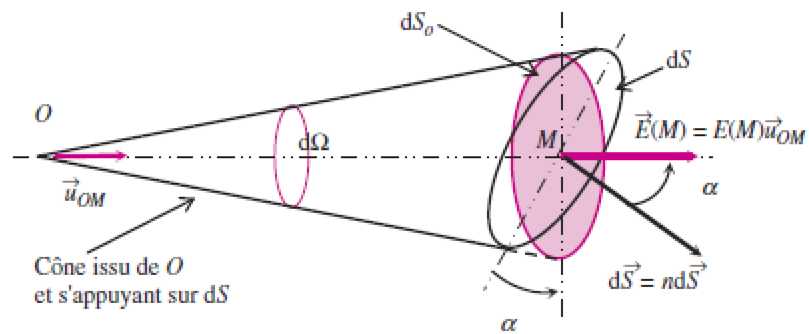
Représentation vectorielle d'une surface

Le vecteur élément de surface s'écrit en fonction du vecteur normal à la surface



$$d\vec{S} = dS\,\vec{n}$$

Angle solide



$$d\Omega = \frac{\vec{u}.d\vec{S}}{r^2} = \frac{u.dS\cos\theta}{r^2}$$

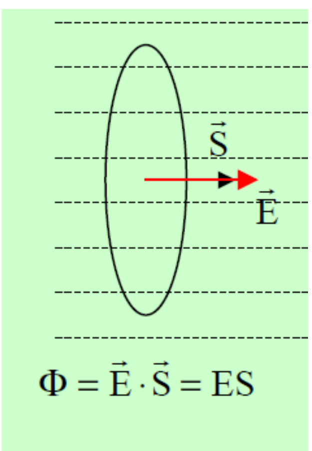
$$\Omega = \iint d\Omega = 4\pi$$

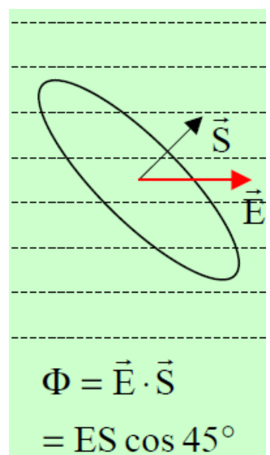
12- Théorème de Gauss

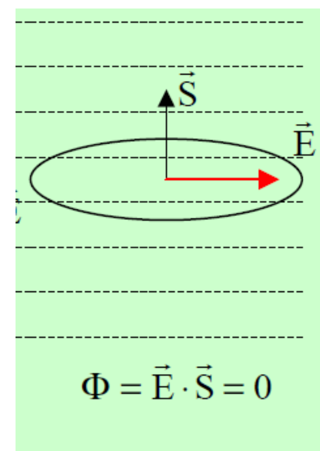
Friedrich
Gauss

Flux du champ à travers une surface fermée

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} \qquad et \qquad \Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S}$$





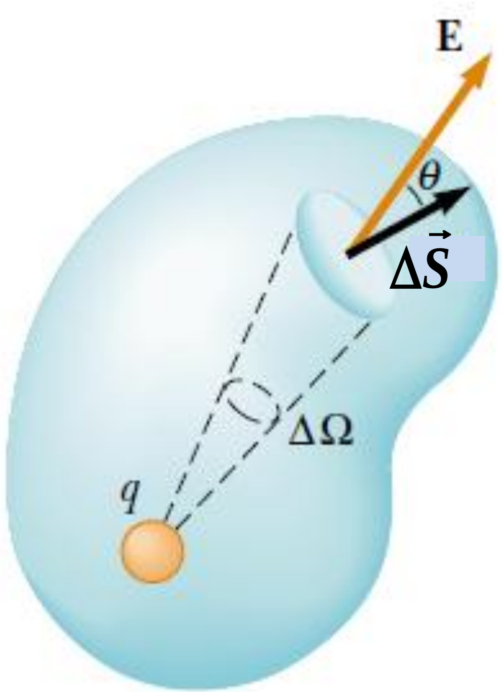


12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

A- Cas de charge q à l'intérieur de la surface

Le flux du champ crée par la charge q à travers la surface S est:



$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

$$\Phi = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}.d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\vec{u}.d\vec{S}}{r^2}$$

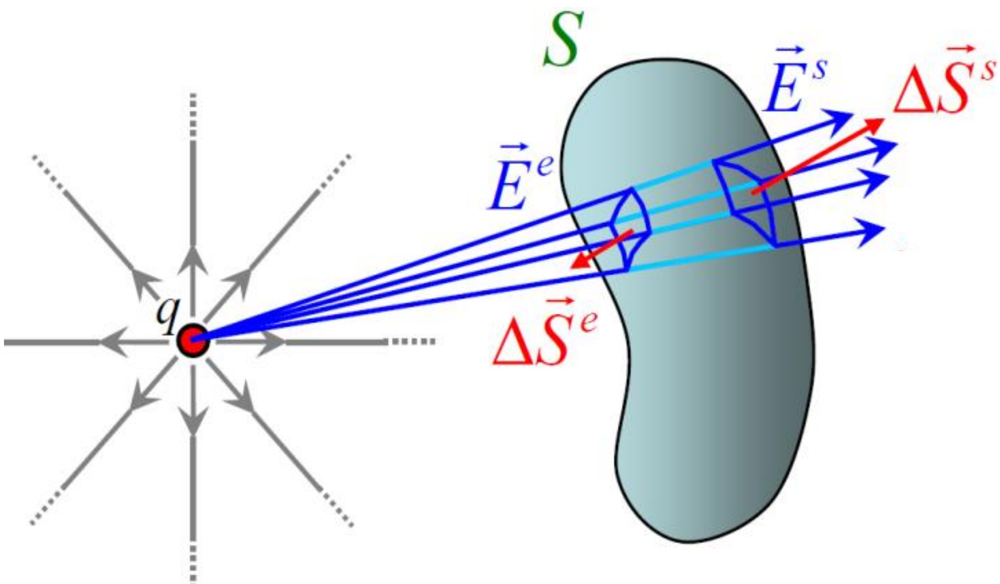
$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

B- Cas de charge q à l'extérieur de la surface

Il y a deux flux puisqu'il deux surfaces dS^s et dS^e traversées par le champ de q



$$\Phi_1 = \iint \vec{E}.d\vec{S}^s = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint d\Omega$$

$$\Phi_2 = \iint \vec{E}\,'.d\vec{S}^e = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint d\Omega$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

C- Enoncé du théorème de Gauss

Le flux du champ à travers la surface S fermée est:

$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

q_{int} *sont les charges à l'intérieur de la surface de Gauss*

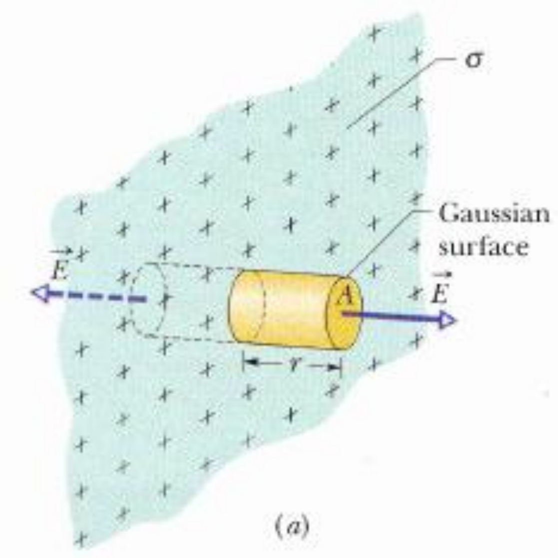
12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

D- Applications

1- Plan infini uniformément chargé

➢Champ électrique



Le champ électrique est perpendiculaire au plan chargé

La surface de Gauss choisie est un cylindre de rayon r

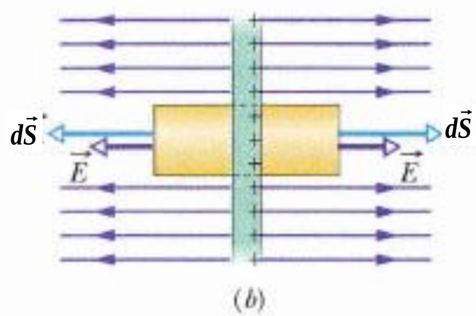
Il y a deux flux à travers les deux surfaces de base

$$\Phi_1 = ES \quad et \quad \Phi_2 = ES$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2ES$$

$$\sum q_{int} = \iint \sigma dS = \sigma S$$

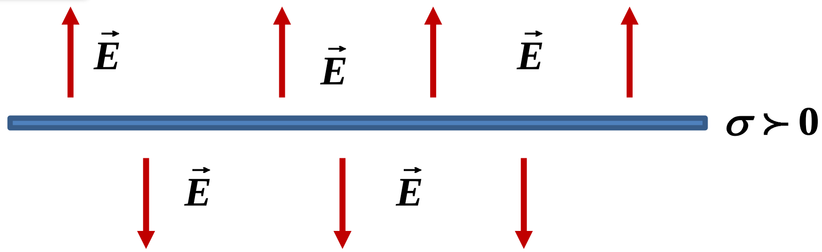
$$\Phi = 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

➢Potentiel électrique



La relation entre le champ électrique et le potentiel est:

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -Edy$$

En intégrant suivant oy on obtient:

$$V = -\int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dy = -\frac{\sigma y}{2\varepsilon_0} + cte$$

12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

2- Sphère de rayon R uniformément chargé

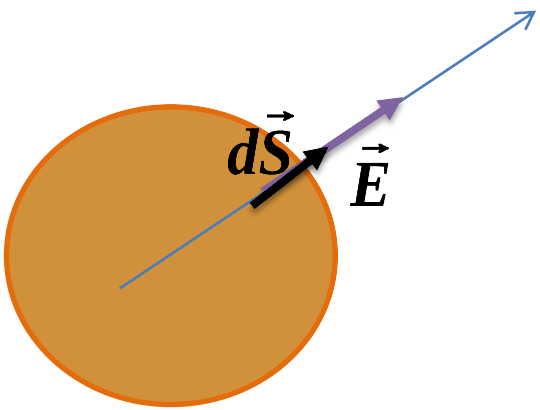
➢Champ électrique

Le champ électrique, dans ce cas, est radial

La surface de Gauss choisie est une sphère de rayon r

Le flux du champ à travers cette surface s'écrit:

$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \iint E.dS$$



Le champ électrique est constant le long de la surface S

$$\Phi = E\iint dS = ES = E\,4\pi r^2$$

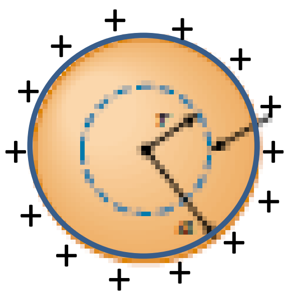
12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

a- Cas d'une distribution de charges en surface :

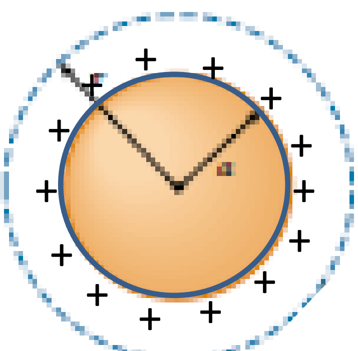
$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Surface de Gauss tel que r< R



$$\sum q_{int} = \iint \sigma dS = 0 \qquad \Rightarrow E = 0$$

Surface de Gauss tel que r> R

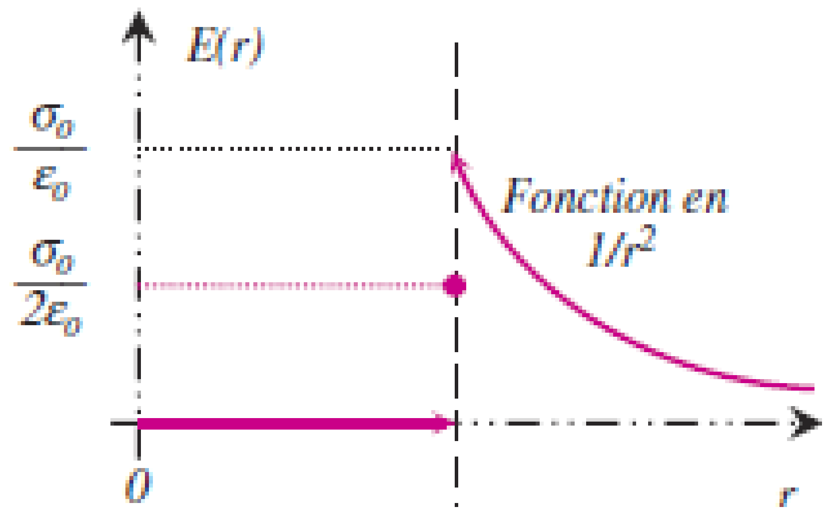


$$\sum q_{int} = \iint \sigma dS = \sigma S = Q$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Répartition surfacique



12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

➢Potentiel électrique

La relation entre le champ électrique et le potentiel est:

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -Edr$$

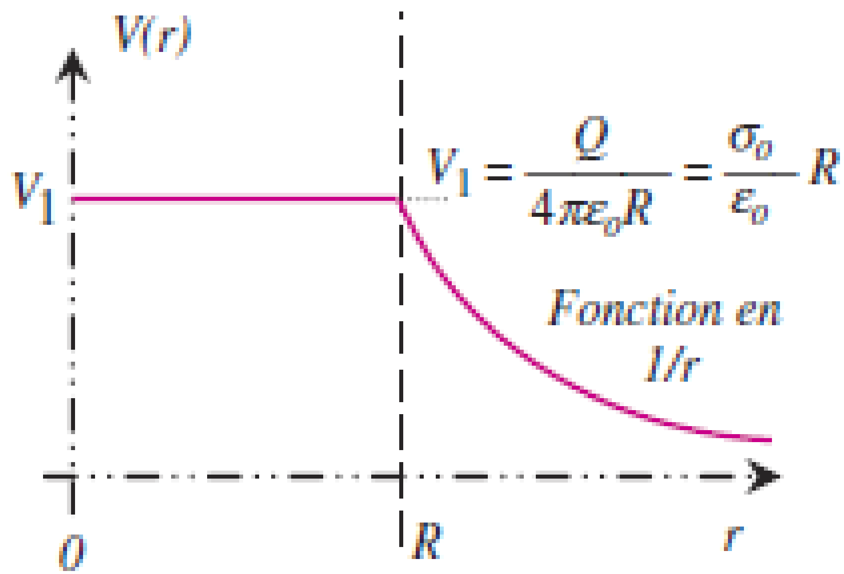
r< R $\quad E_1 = 0 \Rightarrow V_1 = C_1$

r> R $\quad V_2 = -\int E_2 dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$

Conditions aux limites: $\quad V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$

$$V_2(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$V_1(R) = V_2(R) \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



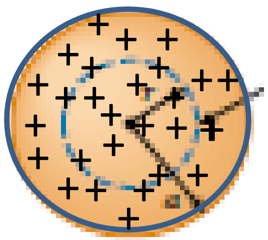
12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

a- Cas d'une distribution de charges en volume :

$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

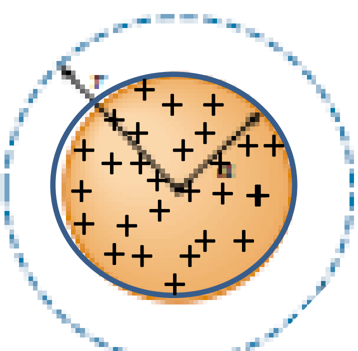
Surface de Gauss tel que r< R



$$\sum q_{int} = \iiint \rho dV = \rho \int_0^r dV \qquad \sum q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E\,4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r^3 \qquad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

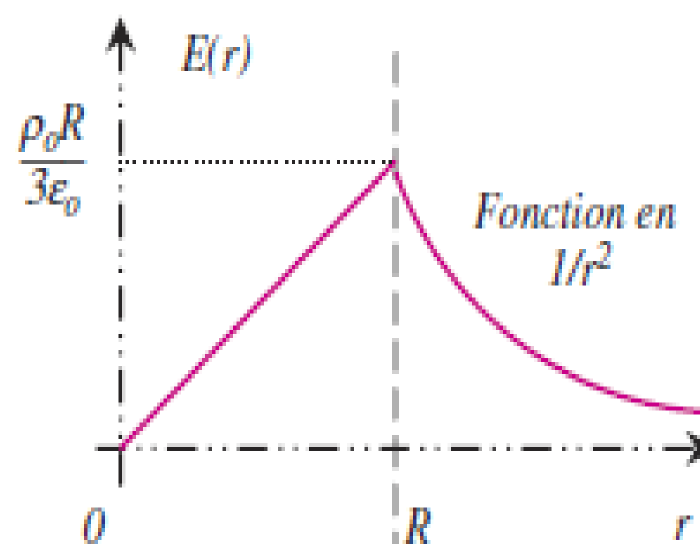
Surface de Gauss tel que r> R



$$\sum q_{int} = \iiint \rho dV = \rho \int_0^R dV \qquad \sum q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 =$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Répartition volumique



12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

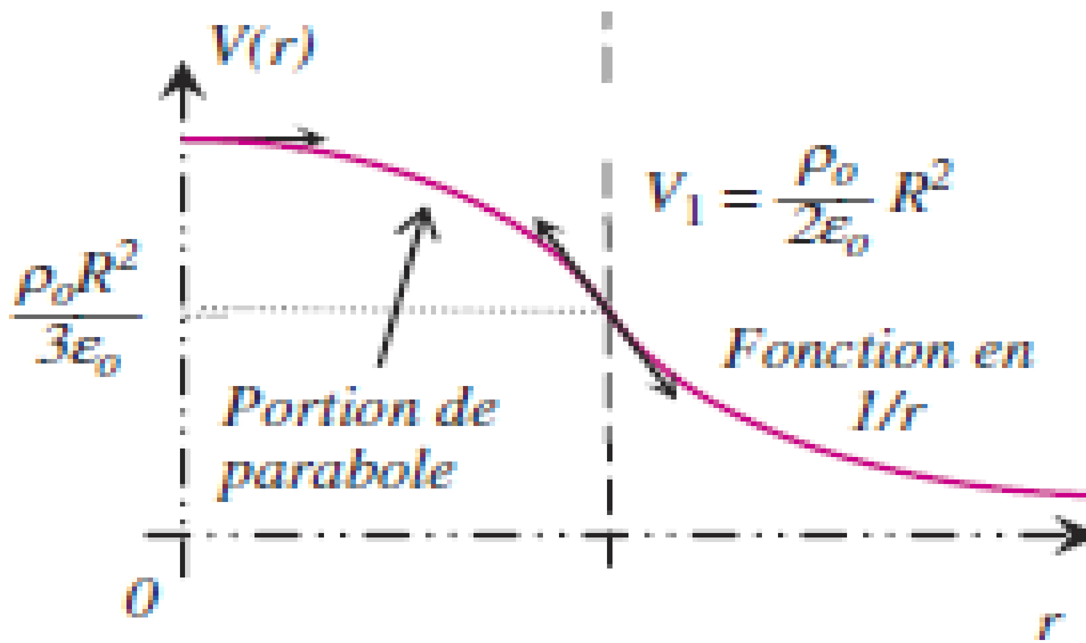
➢Potentiel électrique

La relation entre le champ électrique et le potentiel est:

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -Edr$$

r< R $\quad E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \Rightarrow V_1 = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1$

r> R $\quad V_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_2$



Conditions aux limites:

$$V_2(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$V_1(R) = V_2(R) \Rightarrow C_1 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

3- Fil infini uniformément chargé

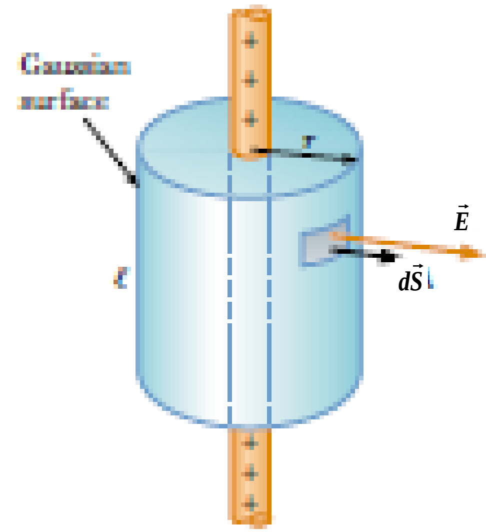
➢Champ électrique

Le champ électrique, dans ce cas, est radial

La surface de Gauss choisie est un cylindre de rayon r

Le flux du champ à travers cette surface s'écrit:

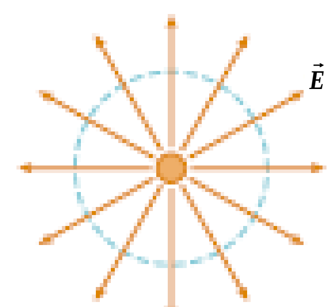
$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \iint E.dS \qquad \Phi = E\iint dS = ES = E\ 2\pi rl$$



Les charges à l'intérieur de la surface de Gauss sont:

$$\sum q_{\text{int}} = \int \lambda dl = \lambda l = Q$$

$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad E\ 2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



12- Théorème de Gauss

Friedrich Gauss

➢Potentiel électrique

La relation entre le champ électrique et le potentiel est:

$$dV = -\vec{E}.d\vec{l} = -Edr$$

En intégrant en fonction de r on obtient:

$$V = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + Cte$$